CAPES externe de Mathématiques
session 2002
Première composition

NOTATIONS ET OBJECTIF

On note :

$\mathbb{N}$ l'ensemble des nombres entiers naturels et $\mathbb{N}^*$ l'ensemble des nombres entiers naturels non nuls,
$\mathbb{Z}$ l'ensemble des nombres entiers relatifs,
$\pi\mathbb{Z}$ l'ensemble des multiples entiers du nombre π,
$\mathbb{R}$ l'ensemble des nombres réels et $\mathbb{R}^*$ l'ensemble des nombres réels non nuls,
$\mathbb{C}$ l'ensemble des nombres complexes.

D'autre part, si A et B sont des parties quelconques de $\mathbb{R}$, on note :
$A \setminus B$ l'ensemble des réels appartenant à A mais n'appartenant pas à B, autrement dit $A \cap \complement_{\mathbb{R}} B$.

Toutes les fonctions considérées dans ce problème sont à valeurs dans $\mathbb{C}$ ou dans $\mathbb{R}$.

On note $\circ$ la composition des applications.

On note respectivement $\Re$ et $\Im$ les applications "partie réelle" et "partie imaginaire" de $\mathbb{C}$ vers $\mathbb{R}$.

On note **cot** la fonction cotangente.

L'entier naturel n, l'intervalle J de $\mathbb{R}$, d'intérieur non vide, et l'application f de J vers $\mathbb{C}$ (ou vers $\mathbb{R}$) n fois dérivable étant donnés, on note $f^{(n)}$ la dérivée n^e de f sur J. (En particulier, $f^{(0)} = f$.)
On utilisera la notation usuelle f' pour désigner $f^{(1)}$.

L'entier naturel n et l'intervalle J de $\mathbb{R}$, d'intérieur non vide, étant donnés, on note :

$\mathcal{D}^n(J)$ l'ensemble des applications de J vers $\mathbb{C}$ au moins n fois dérivables sur J.
$\mathcal{D}^n(J,\mathbb{R})$ l'ensemble des applications de J vers $\mathbb{R}$ au moins n fois dérivables sur J.
$\mathcal{C}^n(J)$ l'ensemble des applications de J vers $\mathbb{C}$ de classe $\mathcal{C}^n$ sur J.
$\mathcal{C}^n(J,\mathbb{R})$ l'ensemble des applications de J vers $\mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^n$ sur J.
$\mathcal{C}^\infty(J)$ l'ensemble des applications de J vers $\mathbb{C}$ de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur J.
$\mathcal{C}^\infty(J,\mathbb{R})$ l'ensemble des applications de J vers $\mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur J.

On étend ces notations au cas où J est l'union de deux intervalles disjoints et d'intérieurs non vides.

Si J contient l'intervalle (d'intérieur non vide) K, si f est une application de J vers $\mathbb{C}$ (respectivement vers $\mathbb{R}$), et si la restriction de f à K appartient à $\mathcal{C}^n(K)$ (respectivement à $\mathcal{C}^n(K,\mathbb{R})$), on pourra considérer que f appartient à $\mathcal{C}^n(K)$ (respectivement à $\mathcal{C}^n(K,\mathbb{R})$).

Soit z un nombre complexe fixé. On rappelle que l'application $x \mapsto x^z = e^{z \ln x}$, de $]0,+\infty[$ vers $\mathbb{C}$, est dérivable sur $]0,+\infty[$, de dérivée l'application $x \mapsto z x^{z-1}$ de $]0,+\infty[$ vers $\mathbb{C}$.

On considère dans ce problème un intervalle fixé I de $\mathbb{R}$, d'intérieur non vide et stable par l'application $x \mapsto \dfrac{x}{2}$ de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$, ainsi que par sa réciproque $x \mapsto 2x$.

L'intervalle I est en conséquence : ou $]0,+\infty[$, ou $[0,+\infty[$, ou $]-\infty,0[$, ou $]-\infty,0]$, ou $\mathbb{R}$ lui-même.

Ce problème vise essentiellement l'obtention de résultats simples relatifs à l'équation

$$E(I): \qquad f(x) = x f'\left(\frac{x}{2}\right)$$

d'inconnue f appartenant à l'ensemble $\mathcal{D}^1(I)$.

Une solution de $E(I)$ est donc un élément f de $\mathcal{D}^1(I)$ vérifiant, pour tout réel x de I, $f(x) = x f'\left(\dfrac{x}{2}\right)$.

On note $\mathcal{S}(I)$ l'ensemble des solutions de l'équation $E(I)$.

Dans certaines parties, on s'intéresse plus spécialement aux solutions de l'équation $E(I)$ appartenant à l'ensemble $\mathcal{D}^1(I,\mathbb{R})$. On note alors $E_{\mathbb{R}}(I)$ ce problème "restreint" et $\mathcal{S}_{\mathbb{R}}(I)$ l'ensemble de ses solutions.

La partie I, très courte, concerne essentiellement l'interprétation graphique de l'équation $E_{\mathbb{R}}(I)$.
La partie II, d'une longueur moyenne, traite des généralités relatives à l'équation $E(I)$ et en recherche des solutions possédant certaines propriétés particulières.
Dans la partie III, plus longue, une interrogation sur la dimension de l'espace $\mathcal{S}(]0,+\infty[)$ conduit à la découverte de solutions inattendues.
La partie IV, assez courte, demande de repérer et de traiter des erreurs dans un texte mathématique.
La partie V, longue, propose d'établir un théorème de Borel et donne une idée de l'espace $\mathcal{S}(]0,+\infty[)$.

Ces cinq parties sont largement indépendantes. On utilise (II.B.1) dans (III.A.1), (II.C.1) dans (III.B).

Partie I

I.1. Dans le cas où I ne contient pas 0, proposer, en l'accompagnant d'une illustration graphique, une interprétation géométrique simple du problème $E_{\mathbb{R}}(I)$.

I.2. Soit (a,b,c) un élément de $\mathbb{C}^3$ et soit $p\colon I \to \mathbb{C}$ l'application définie par la relation :

$$p(x) = ax^2 + bx + c$$

À quelle condition nécessaire et suffisante sur le triplet (a,b,c) l'application p appartient-elle à $\mathcal{S}(I)$?

I.3. Dans cette question, sauf mention contraire, $I =]0,+\infty[$.
Parmi les applications dont les courbes sont dessinées ci-dessous, quelles sont celles qui **ne** vérifient **pas** l'équation $E_{\mathbb{R}}(I)$? *On se contentera de dresser la liste des numéros des représentations graphiques de ces applications et* ***on ne justifiera pas les réponses données.***

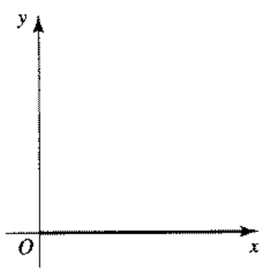


Fig. 1 : demi-droite "horizontale".

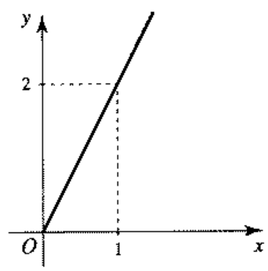


Fig. 2 : demi-droite.

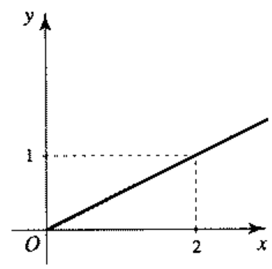


Fig. 3 : demi-droite.

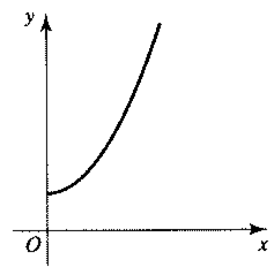


Fig. 4 : demi-parabole d'axe (Oy).

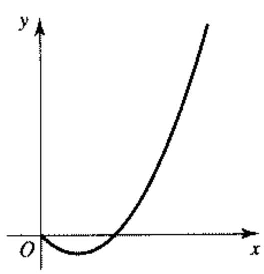


Fig. 5 : arc de parabole d'axe "vertical".

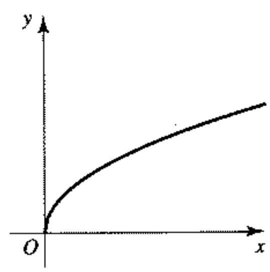


Fig. 6 : demi-parabole d'axe (Ox).

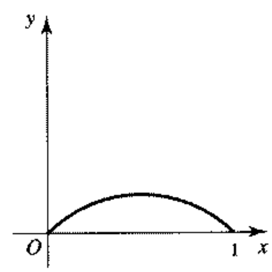


Fig. 7 : courbe coïncidant sur $]0,1]$ avec un arc de cercle.

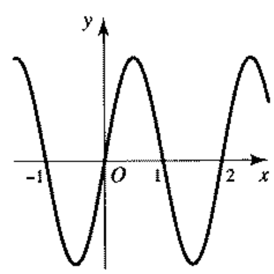


Fig. 8 : une sinusoïde $(I = \mathbb{R})$.

Partie II

— A —

II.A.1. Montrer que, pour les lois usuelles, $\mathcal{S}(I)$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{C}$, non réduit à $\{0\}$.
De manière analogue, de quelle structure algébrique peut-on munir $\mathcal{S}_{\mathbb{R}}(I)$?

II.A.2. Soit une application $f\colon I \to \mathbb{C}$. Montrer que les trois propositions suivantes sont équivalentes :

- **(i)** $f \in \mathcal{S}(I)$;
- **(ii)** $\Re \circ f \in \mathcal{S}_{\mathbb{R}}(I)$ et $\Im \circ f \in \mathcal{S}_{\mathbb{R}}(I)$;
- **(iii)** l'application $x \mapsto \overline{f(x)}$, de I vers $\mathbb{C}$, appartient à $\mathcal{S}(I)$.

— B —

II.B.1. Soit f un élément de $\mathcal{S}(I)$. Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, f est $(n+1)$ fois dérivable sur $I \setminus \{0\}$ et que, pour tout élément x de $I \setminus \{0\}$,

$$f^{(n)}(x) = \frac{x}{2^n}\, f^{(n+1)}\left(\frac{x}{2}\right) + \frac{n}{2^{n-1}}\, f^{(n)}\left(\frac{x}{2}\right)$$

II.B.2. On suppose que l'intervalle I contient 0.
Montrer que tout élément f de $\mathcal{S}(I)$ vérifie $f(0) = 0$ et appartient à $\mathcal{C}^1(I)$.

— C —

II.C.1. *Étude d'une fonction auxiliaire.*

II.C.1.a. Étudier les variations de l'application $v : t \mapsto t2^{1-t}$, de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$.

II.C.1.b. Montrer que l'ensemble des solutions de l'équation $t2^{1-t} = 1$, d'inconnue réelle t, est l'ensemble $\{1, 2\}$.

II.C.2. *Recherche des solutions polynomiales.*
Quelles sont les fonctions-polynômes appartenant à $\mathcal{S}(I)$?

II.C.3. *Recherche des solutions plusieurs fois dérivables au point* 0.
On suppose que l'intervalle I contient 0.
Soit n un entier supérieur ou égal à 2 et soit f un élément de $\mathcal{S}(I)$ n fois dérivable au point 0.

II.C.3.a. En utilisant la formule de Taylor-Young, montrer que, pour tout entier p compris entre 1 et n, $f^{(p)}(0) = 0$ ou $p2^{1-p} = 1$.

II.C.3.b. En déduire qu'il existe des complexes a et b tels que, quand x tend vers 0 dans I,

$$f(x) = ax + bx^2 + o(x^n)$$

II.C.4. *Recherche des solutions développables en série entière au point* 0.
On suppose que $I = \mathbb{R}$.
On considère une application $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ développable en série entière au point 0 : il existe donc par définition un réel strictement positif, noté R, ainsi qu'une suite complexe, notée $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, tels que :

$$\forall x \in \,]-R, R[,\ f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$$

Montrer que, si f appartient à $\mathcal{S}(\mathbb{R})$, alors f est polynomiale sur l'intervalle $]-R, R[$, puis sur $\mathbb{R}$.

II.C.5. *Recherche des solutions exponentielles.*
Montrer que, quel que soit le complexe a, l'application $x \mapsto \mathrm{e}^{ax}$, de I vers $\mathbb{C}$, n'appartient pas à $\mathcal{S}(I)$.

II.C.6. *Recherche des solutions périodiques.*
On suppose que $I = \mathbb{R}$.
Montrer qu'il n'existe pas de solution de l'équation $E(\mathbb{R})$ qui soit périodique et non identiquement nulle.
On considérera un élément f de $\mathcal{S}(\mathbb{R})$, périodique ; on montrera que f' tend vers 0 en $+\infty$, on en déduira que f' est nulle sur $\mathbb{R}$ et on conclura.

Partie III

On suppose dans toute cette partie que $I = \,]0, +\infty[$.

— A —

III.A.1. Montrer que, si l'application $f : I \to \mathbb{C}$ appartient à $\mathcal{S}(I)$, alors, pour tout entier naturel k, l'application $x \mapsto x^k f^{(k)}(x)$, de I vers $\mathbb{C}$, appartient aussi à $\mathcal{S}(I)$.

III.A.2. On suppose dans cette question que $\mathcal{S}(I)$ est de dimension finie.
Soit une application f appartenant à $\mathcal{S}(I)$, non identiquement nulle.

III.A.2.a. Montrer que f est solution sur I d'une équation différentielle linéaire homogène dont l'ordre, noté q, est compris entre 1 et $\dim \mathcal{S}(I)$.

III.A.2.b. En déduire que l'application $y : t \mapsto f(\mathrm{e}^t)$, de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{C}$, est solution sur $\mathbb{R}$ d'une équation différentielle linéaire homogène d'ordre q à coefficients constants.

III.A.2.c. Rappeler la forme générale des applications de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{C}$ solutions d'une équation différentielle linéaire homogène d'ordre q à coefficients constants.
En déduire que f est combinaison linéaire d'applications de la forme $x \mapsto (\ln x)^\nu x^a$, a étant un *complexe* et ν un *entier naturel.*

III.A.2.d. Peut-on affirmer *a priori*, c'est-à-dire sans justification, que les applications de la forme $x \mapsto (\ln x)^\nu x^a$ dont f est combinaison linéaire appartiennent à $\mathcal{S}(I)$?

— B —

III.B.1. *Recherche des éléments de $\mathcal{S}(I)$ de la forme $x \mapsto (\ln x)^\nu x^a$, (a,ν) appartenant à $\mathbb{C} \times \mathbb{N}^*$.*
Soient a un nombre complexe et ν un entier naturel *non nul.*
On suppose que l'application $\chi\colon x \mapsto (\ln x)^\nu x^a$, de I vers $\mathbb{C}$, appartient à $\mathcal{S}(I)$.

III.B.1.a. Montrer que, pour tout réel t, $2^{a-1}t^\nu - a\,(t-\ln 2)^\nu - \nu\,(t-\ln 2)^{\nu-1} = 0$.

III.B.1.b. Montrer que $2^{a-1} = a$.

III.B.1.c. Montrer que, si $\nu \geqslant 2$, alors $(\ln 2)^\nu = 0$, et que, si $\nu = 1$, alors $a \ln 2 = 1$.

III.B.1.d. Montrer que les résultats précédents sont contradictoires et conclure.

III.B.2. Soit a un nombre complexe.
Montrer que l'application $x \mapsto x^a$, de I vers $\mathbb{C}$, appartient à $\mathcal{S}(I)$ si et seulement si $2^{a-1} = a$.

III.B.3. *Recherche des éléments de $\mathcal{S}(I)$ de la forme $x \mapsto x^a$, a appartenant à $\mathbb{R}$.*
Quels sont les réels α tels que l'application $x \mapsto x^\alpha$, de I vers $\mathbb{C}$, appartienne à $\mathcal{S}(I)$?

III.B.4. *Recherche des éléments de $\mathcal{S}(I)$ de la forme $x \mapsto x^a$, a appartenant à $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$.*
Dans cette question, on considère l'application $g\colon \mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z} \to \mathbb{R}$ définie par la relation :

$$g(\theta) = 2\theta - (\ln 2)(\sin\theta)\,\mathrm{e}^{\theta\cot\theta}$$

On recherche les complexes *non réels* a tels que l'application $h\colon I \to \mathbb{C}$ définie par la relation :

$$h(x) = x^a$$

appartienne à $\mathcal{S}(I)$.
On note respectivement α et ω les parties réelles et imaginaires du complexe *non réel* a.
On note aussi ρ le module de a et ϕ la détermination appartenant à $]-\pi,\pi[$ de l'argument de a.

III.B.4.a. Pourquoi suffit-il de n'envisager dans cette recherche que le cas où ω est strictement positif ?

On suppose dans la suite de la présente question (III.B.4) que ω est strictement positif. On remarque que ϕ est donc élément de $]0,\pi[$.

III.B.4.b. Exprimer sur les réels α et ω une condition nécessaire et suffisante d'appartenance de h à $\mathcal{S}(I)$.

III.B.4.c. Montrer que h appartient à $\mathcal{S}(I)$ si et seulement s'il existe un entier relatif n et un réel θ appartenant à $]2n\pi,(2n+1)\,\pi[$ tels que : $\phi = \theta - 2n\pi$, $2^{\rho\cos\theta} = 2\rho$ et $\rho\,(\ln 2)\sin\theta = \theta$.

III.B.4.d. En déduire que h appartient à $\mathcal{S}(I)$ si et seulement s'il existe un réel θ appartenant à l'ensemble $\displaystyle\bigcup_{k\in\mathbb{N}}]2k\pi,(2k+1)\,\pi[$ tel que

$$g(\theta) = 0 \quad \text{et} \quad \alpha = \frac{\theta\cot\theta}{\ln 2} \quad \text{et} \quad \omega = \frac{\theta}{\ln 2}$$

III.B.4.e. Montrer que, pour tout réel θ appartenant à $]0,\pi[$, $\dfrac{\ln 2}{2}\,\dfrac{\sin\theta}{\theta}\,\mathrm{e}^{\theta\cot\theta} < 1$.
On rappelle que, pour tout réel θ appartenant à $[0,\pi/2[$, $\sin\theta \leqslant \theta \leqslant \tan\theta$.
En déduire que l'équation $\mathcal{G}$: $g(\theta) = 0$, d'inconnue θ dans $\mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z}$, n'a aucune solution sur $]0,\pi[$.

III.B.4.f. Montrer que, quel que soit l'entier naturel non nul n, l'équation $\mathcal{G}$ définie en (**III.B.4.e**) possède une et une seule solution dans l'intervalle $]2n\pi,(2n+1)\,\pi[$.
On pourra étudier le signe de $g'(\theta)$ sur $]2n\pi,(2n+1)\,\pi[$.

On note θ_n cette solution, on note respectivement α_n et ω_n les réels α et ω obtenus pour $\theta = \theta_n$, et on note enfin h_n l'application h correspondante.

III.B.4.g. Montrer que les réels de la famille $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sont deux à deux distincts.
En déduire que la famille $(h_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est libre.
Nous avons supposé dans la section (**III.A**) que $\mathcal{S}(I)$ était de dimension finie. Qu'en est-il au juste ?
De même, l'espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ $\mathcal{S}_{\mathbb{R}}(I)$ est-il de dimension finie ?

III.B.4.h. Calculez (à l'aide du programme de recherche de solutions approchées d'une équation numérique à une variable dont votre calculatrice est pourvue) une valeur approchée de θ_1, de α_1 et de ω_1, et reportez sur votre copie les valeurs approchées décimales par défaut et par excès à 10^{-4} près de ces trois nombres.
Reproduisez sur votre copie la courbe représentative de $\Re \circ h_1$ sur $]0,1]$ obtenue sur votre calculatrice.

Partie IV

— A —

Cette section comporte une seule question, située au bas de cette page.
Imaginons que vous posiez l'exercice suivant à l'un de vos élèves :

[***Début de l'exercice proposé.***]

1. Soit ψ la fonction définie par $\psi(t) = \mathrm{e}^{-1/t}$ si $t > 0$, $\psi(t) = 0$ si $t \leqslant 0$.
Montrer que ψ appartient à $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

2. En déduire qu'il existe dans $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ une fonction φ, positive et dont le support soit la boule unité de l'espace vectoriel euclidien $\mathbb{R}^n$. [On pourra prendre $\varphi(x) = \psi(1 - \|x\|^2)$.]

3. Montrer qu'étant donnés deux intervalles compacts $[a, d]$ et $[b, c]$ strictement emboîtés (avec $a < b < c < d$), il existe dans $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ une fonction s de support $[a, d]$, de valeurs comprises entre 0 et 1, et constante de valeur 1 sur $[b, c]$.

[***Fin de l'exercice proposé.***]

Imaginons également que cet élève vous remette la solution suivante :

[***Début de la solution rédigée par l'élève.***]

1. Pour $t > 0$ et $k \in \mathbb{N}$ on a, par une récurrence facile, $\psi^{(k)}(t) = P_k\Big(\dfrac{1}{t}\Big)\mathrm{e}^{-1/t}$, où P_k est un polynôme de degré $2k$ (avec $P_{k+1}(X) = X^2(P_k(X) - P_k'(X))$).
Par suite $\psi^{(k)}(t)$ tend vers 0 lorsque t tend vers 0 à droite (et à gauche, évidemment). De l'égalité classique des accroissements finis on déduit que ψ est dérivable à tout ordre à l'origine, avec dérivées nulles.

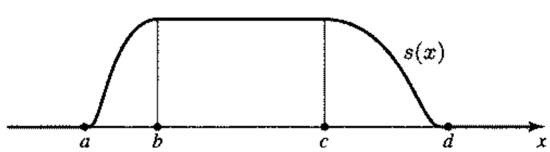
Courbes représentatives des fonctions ψ et φ

2. Rappelons que le support d'une fonction est l'adhérence de l'ensemble des points où elle ne s'annule pas, c'est-à-dire le complémentaire du plus grand ouvert sur lequel elle est identiquement nulle.
La fonction composée $\varphi(x) = \psi\Big(1 - \sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2\Big)$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^n$, nulle si et seulement si $\|x\| > 1$; son support est donc la boule unité (fermée).

3. Soit $\varphi(x) = \psi(1 - x^2)$ la fonction ci-dessus (pour $n = 1$). La fonction définie par

$$s(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\varphi(0)}\,\varphi\Big(\dfrac{x-b}{b-a}\Big) & \text{pour} \quad a < x < b \\ \dfrac{1}{\varphi(0)}\,\varphi\Big(\dfrac{x-c}{d-c}\Big) & \text{pour} \quad c < x < d \end{cases}$$

et $s(x) = 1$ sur $[b, c]$, $s(x) = 0$ hors de $]a, d[$ est alors $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, puisque les dérivées à gauche et à droite sont toutes nulles en a, b, c et d ; elle a donc les propriétés voulues.



Courbe représentative de la fonction s

[***Fin de la solution rédigée par l'élève.***]

Question : les dessins de l'élève sont corrects mais ses réponses comportent des erreurs ; en trouver deux.

— B —

IV.B.1. Mettre en forme la réponse **1** de l'élève cité dans la section (**IV.A**). En particulier, préciser la proposition de récurrence utilisée ainsi que l'usage qui y est fait du théorème des accroissements finis.

IV.B.2. Quelle est la norme sur $\mathbb{R}^n$ considérée dans la question **2** de l'exercice cité section (**IV.A**) ? Pourquoi l'application φ est-elle de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^n$?
Soit x un élément de $\mathbb{R}^n$. Quelle est la valeur de $\varphi(x)$ si $\|x\| = 1$?
Pourquoi le support de φ est-il la boule unité fermée de $\mathbb{R}^n$ pour la norme considérée ?

IV.B.3. On s'intéresse maintenant à la question **3** de l'exercice cité dans la section (**IV.A**).

IV.B.3.a. Montrer que l'application de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$

$$\delta : x \longmapsto \begin{cases} e^{\frac{1}{x\,(x-1)}} & \text{si} \quad 0 < x < 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et de support le segment $[0,1]$.
On pourra utiliser la fonction ψ définie dans la question **1** *de l'exercice cité dans la section* (**IV.A**).

IV.B.3.b. Montrer que l'intégrale $\eta = \displaystyle\int_0^1 \delta(t)\,\mathrm{d}t$ est strictement positive.
(*On n'essaiera pas de calculer η.*)

IV.B.3.c. Montrer que l'application $\Delta : x \mapsto \dfrac{1}{\eta}\displaystyle\int_0^x \delta(t)\,\mathrm{d}t$, de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$, est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, strictement monotone sur $[0,1]$, constante de valeur 0 sur $]-\infty, 0]$ et de valeur 1 sur $[1, +\infty[$.

IV.B.3.d. Répondre à la question **3** de l'exercice cité dans la section (**IV.A**).
On pourra considérer l'application $s : x \mapsto \Delta\left(\dfrac{x-a}{b-a}\right) + \Delta\left(\dfrac{d-x}{d-c}\right) - 1$.

Partie V

— A —

En appliquant le résultat établi en (**IV.B.3.d**) au cas où $d = -a = 1$ et $c = -b = 1/2$, on constate qu'il existe une application de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$, de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, constante de valeur 0 sur $\mathbb{R} \setminus]-1,1[$, constante de valeur 1 sur $[-1/2, 1/2]$, strictement monotone sur $[-1, -1/2]$ ainsi que sur $[1/2, 1]$.

Dans la suite, on se donne une telle application et on la note ξ.

Une suite réelle $a = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tout à fait quelconque étant donnée, on note, si n est un entier naturel, $\mu_n(a)$ (ou simplement μ_n s'il n'y a pas d'ambiguïté) le nombre $\max(1, |a_n|)$, ainsi que $\varphi_{a,n}$ (ou simplement φ_n s'il n'y a pas d'ambiguïté) l'application de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par la relation :

$$\varphi_{a,n}(x) = \frac{a_n}{n!}\,\xi(\mu_n x)\,x^n$$

Il est clair que $\varphi_{a,n}$ appartient à $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$.

V.A.1. On considère une suite réelle $a = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

V.A.1.a. Montrer que, pour tout réel x et tout entier n vérifiant $n \geqslant 1$ et $\mu_n|x| < 1$,

$$\left|\varphi_n(x)\right| \leqslant \frac{|x|^{n-1}}{n!}$$

Que peut-on dire de $\varphi_n(x)$ si le réel x et l'entier n vérifient $n \geqslant 1$ et $\mu_n|x| \geqslant 1$?

V.A.1.b. Montrer que, pour tout réel x, la série de terme général $\varphi_n(x)$ converge.
On note Φ_a (ou Φ s'il n'y a pas d'ambiguïté) l'application de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par la relation :

$$\Phi_a(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \varphi_n(x)$$

Que peut-on dire de $\Phi(x)$ si le réel x vérifie $|x| \geqslant 1$?

V.A.1.c. Justifier, pour tout entier naturel j, l'existence du réel $\max\limits_{x\in\mathbb{R}} \left|\xi^{(j)}(x)\right|$, *noté m_j.*
Si j appartient à $\mathbb{N}$, on note $M_j = \max(m_0, m_1, \ldots, m_j)$.

V.A.1.d. Soit j un entier naturel. Montrer que, pour tout entier $n \geqslant j+1$ et tout réel x, $\left|\varphi_n^{(j)}(x)\right| \leqslant \dfrac{2^j M_j}{(n-j)!}$. *On distinguera les cas* $|x| < \dfrac{1}{\mu_n}$ *et* $|x| \geqslant \dfrac{1}{\mu_n}$.

V.A.1.e. En déduire que l'application Φ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et que, pour tout entier naturel j, $\Phi^{(j)}(0) = a_j$.

V.A.1.f. Énoncer le théorème (dû à Émile Borel) qui vient d'être établi. Quel vous paraît être son intérêt ?

V.A.2. On considère maintenant deux suites réelles $a = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $b = (b_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

V.A.2.a. On définit l'application Ψ de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ par la relation : $\Psi(x) = \Phi_a(x) + \Phi_b(x-1)$. Montrer que l'application Ψ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et que, pour tout entier naturel n, $\Psi^{(n)}(0) = a_n$ et $\Psi^{(n)}(1) = b_n$.

V.A.2.b. Le réel strictement positif λ étant fixé, montrer qu'il existe une application F de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$, de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et telle que, pour tout entier naturel n, $F^{(n)}(0) = a_n$ et $F^{(n)}(\lambda) = b_n$.

— B —

Dans toute la suite, la lettre ℓ *représente le réel* $\dfrac{\ln 2}{2}$.

V.B.1. Soit f une application de $]0,+\infty[$ vers $\mathbb{R}$. Le réel t étant quelconque, on pose $\widehat{f}(t) = f(e^{2t})$. Montrer que, si f appartient à $\mathcal{S}_{\mathbb{R}}(]0,+\infty[)$, alors l'application $\widehat{f}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et, pour tout réel t, $\widehat{f}\,'(t) = \widehat{f}(t+\ell)$.

On note $\mathcal{T}$ *l'ensemble des éléments* g *de* $\mathcal{D}^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$ *vérifiant, pour tout réel* x, $g'(x) = g(x+\ell)$,
$\mathcal{H}$ *l'ensemble des éléments* f *de* $\mathcal{C}^\infty([0,\ell],\mathbb{R})$ *tels que, pour tout entier naturel* n,
$f^{(n)}(\ell) = f^{(n+1)}(0)$, *et*
$\mathcal{K}$ *l'espace des éléments de* $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$ *de support inclus dans* $[0,\ell]$.

La notion de support a été définie dans la réponse **2** *de la section* (**IV.A**).

On note enfin $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ *l'espace vectoriel sur* $\mathbb{R}$ *des suites réelles.*

V.B.2. Montrer que $\mathcal{T}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$ isomorphe à $\mathcal{S}_{\mathbb{R}}(]0,+\infty[)$.

V.B.3. On se donne un élément γ de $\mathcal{H}$.

V.B.3.a. On considère l'application $\gamma_1 : x \mapsto \gamma'(x-\ell)$, de $[\ell, 2\ell]$ vers $\mathbb{R}$. Montrer que la fonction $g_1 : [0,2\ell] \to \mathbb{R}$, coïncidant avec γ sur $[0,\ell]$ et avec γ_1 sur $]\ell,2\ell]$, est dérivable sur $[0,2\ell]$.

V.B.3.b. Soit l'application $\gamma_{-1} : x \mapsto \gamma(0) + \displaystyle\int_\ell^{x+\ell} \gamma(t)\,\mathrm{d}t$, de $[-\ell,0]$ vers $\mathbb{R}$. Montrer que la fonction $g_{-1} : [-\ell,\ell] \to \mathbb{R}$, coïncidant avec γ sur $[0,\ell]$ et avec γ_{-1} sur $[-\ell,0[$, est dérivable sur $[-\ell,\ell]$.

V.B.3.c. On ne demande dans cette question que le plan de la démonstration : on n'entrera dans aucun détail et on s'en tiendra aux idées essentielles et à leur articulation. Montrer qu'il existe un et un seul élément g de $\mathcal{T}$ dont la restriction au segment $[0,\ell]$ est γ.

V.B.3.d. On note ρ l'application de $\mathcal{T}$ vers $\mathcal{H}$ qui, à l'élément g de $\mathcal{T}$, associe la restriction de g à $[0,\ell]$. Montrer que ρ est un isomorphisme d'espaces vectoriels sur $\mathbb{R}$.

V.B.4. **V.B.4.a.** Montrer que l'application $\vartheta\colon f \mapsto \left(f^{(n)}(0)\right)_{n\in\mathbb{N}}$, de $\mathcal{H}$ vers $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, est une application linéaire surjective.

On suppose que l'espace $\operatorname{Ker}\vartheta$ admet un supplémentaire dans $\mathcal{H}$ et l'on en choisit un, que l'on note $\mathcal{U}$.

V.B.4.b. En utilisant le sous-espace $\mathcal{U}$, montrer que $\mathcal{S}_{\mathbb{R}}(]0,+\infty[)$ est isomorphe à $\mathbb{R}^{\mathbb{N}} \times \mathcal{K}$.

V.B.4.c. Est-il vrai que $\mathcal{S}(]0,+\infty[)$ est isomorphe à $\mathbb{C}^{\mathbb{N}} \times \mathcal{K}_{\mathbb{C}}$ ($\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ étant l'espace vectoriel sur $\mathbb{C}$ des suites complexes et $\mathcal{K}_{\mathbb{C}}$ l'espace des éléments de $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ dont le support est inclus dans $[0,\ell]$) ?