Capes 2002 - Première épreuve

Cette correction a été rédigée par Frédéric Bayart. Si vous avez des remarques à faire, ou pour signaler des erreurs, n'hésitez pas à écrire à : mathweb@free.fr

Mots-clés : équation fonctionnelle, série entière, équation différentielle, accroissements finis,

Commentaires : Voilà un sujet assez original, notamment par sa partie IV qui demande de détecter des erreurs dans un texte mathématique, et de les corriger. D'autres questions (comme I.3.) sortent également du cadre rigide habituel des concours, mais sinon l'étude proposée est assez classique.

Partie I

I.1. $\dfrac{f(x)}{x}$ est la pente de la droite (D_x) passant par $(0,0)$ et $(x,f(x))$. $f'\left(\dfrac{x}{2}\right)$ est la pente de la tangente à la représentation graphique de f au point d'abscisse $x/2$. Pour tout x de I, il faut donc que les droites (D_x) et (T_x) soient parallèles.

I.2. On a :

$$\begin{aligned} p(x) = xp'(x/2) \quad &\iff \quad ax^2 + bx + c = x\,(2a(x/2) + b) \\ &\iff \quad c = 0. \end{aligned}$$

Donc p appartient à $S(I)$ si et seulement si $c = 0$.

I.3. Nous donnons tout de même des justifications :

- 1,2,3 : oui - 4 : non - 5 : oui - et ceci en fonction des résultats de I.2.
- 6 : non. En effet, $f(x)$ s'écrit $f(x) = a\sqrt{x}$ et donc :

$$xf'(x/2) = x\frac{a}{2\sqrt{x/2}} = \frac{a\sqrt{x}}{\sqrt{2}}.$$

- 7 : non. Voici une justification possible. On note A le centre du cercle, B,C,D les points sur la courbe d'abscisse respective 0,1/4,1/2. Si f vérifie $E_{\mathbb{R}}(I)$, la tangente au cercle en C est parallèle à la droite (BD), ce que l'on peut aussi exprimer en disant que $(AC) \perp (BD)$. Comme $AB = AD$, (AC) serait la médiatrice de (BD). En particulier, (AC) passerait par I le milieu de $[BD]$. Mais l'abscisse de I est $1/4$, et le seul point d'abscisse $1/4$ sur (AC) est le point C. On aurait donc C qui serait le milieu de $[BD]$, ce qui est faux.
- 8 : non. Si on prend $x = 2$, la droite passant par $(0,0)$ et $(2,f(2) = 0)$ est l'axe des abscisses, qui n'est pas parallèle à la tangente au point 1.

Partie II

II.A.1. D'abord, $S(I)$ n'est pas vide, ni réduit à $\{0\}$: par exemple, $p(x) = x^2$ est dans $S(I)$. D'autre part, si $f,g \in S(I)$, et $\lambda \in \mathbb{C}$:

$$\begin{aligned} (f+\lambda g)(x) &= f(x) + \lambda g(x) \\ &= xf'(x/2) + \lambda g'(x/2) \\ &= x\,(f+\lambda g)'\,(x/2). \end{aligned}$$

Donc $S(I)$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{C}$, sous-espace vectoriel de l'ensemble des fonctions dérivables de I dans $\mathbb{C}$. De même, $S_{\mathbb{R}}(I)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}$.

II.A.2. Rappelons que $f : I \to \mathbb{C}$ est dérivable si les deux applications $\Re \circ f$ et $\Im \circ f$ sont dérivables, et dans ce cas $f' = (\Re \circ f)' + i(\Im \circ f)'$.

– $(i) \iff (ii)$. Pour tout x de I :

$$\begin{aligned} f(x) = xf'(x/2) &\iff \Re \circ f(x) + i\Im \circ f(x) = x\left((\Re \circ f)'(x/2) + i(\Im \circ f)'(x/2)\right) \\ &\iff \left\{ \begin{array}{lcl} \Re \circ f(x) &=& x(\Re \circ f)'(x/2) \\ \Im \circ f(x) &=& x(\Im \circ f)'(x/2). \end{array} \right. \end{aligned}$$

– $(ii) \iff (iii)$. Evident en utilisant l'équivalence de (i) et (ii).

II.B.1. D'abord, le résultat est vrai pour $n = 0$. Supposons le vrai au rang n, et prouvons-le au rang $n+1$. Si $x \in I - \{0\}$,

$$f^{(n+1)}(x/2) = \frac{2^n}{x}\left(f^{(n)}(x) - \frac{n}{2^{n-1}}f^{(n)}(x/2)\right).$$

Comme $f^{(n)}$ est dérivable, $f^{(n+1)}$ aussi, et f est $(n+2)$ fois dérivable sur $I - \{0\}$. En outre, en dérivant l'égalité qu'on connait au rang n, on obtient :

$$\begin{aligned} f^{(n+1)}(x) &= \frac{1}{2^n}f^{(n+1)}(x/2) + \frac{x}{2^{n+1}}f^{(n+2)}(x/2) + \frac{n}{2^n}f^{(n+1)}(x/2) \\ &= \frac{x}{2^{n+1}}f^{(n+2)}(x/2) + \frac{n+1}{2^n}f^{(n+1)}(x/2) \end{aligned}$$

qui est bien le résultat souhaité à l'ordre $n+1$.

II.B.2. Puisque $\dfrac{f(x)}{x} = f'(x/2)$ si $x \neq 0$, et que f est dérivable en 0,

$$\lim_{x \to 0} f'(x/2) = f'(0). \tag{1}$$

En particulier, en faisant tendre x vers 0 dans $f(x) = xf'(x/2)$, on trouve que $f(0) = 0$. Par ailleurs (**??**) assure la continuité de f' en 0, et $f \in C^1(I)$.

II.C.1.a. $v(t) = t\exp\left((1-t)\ln 2\right)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, et :

$$v'(t) = \exp\big((1-t)\ln 2\big) - t\ln 2\exp\big((1-t)\ln 2\big) = (1 - t\ln 2)2^{1-t}.$$

v est donc strictement croissante sur $]-\infty,1/\ln 2[$, et strictement décroissante sur $]1/\ln 2,+\infty[$.

II.C.1.b. Remarquons d'abord que $v(1) = v(2) = 1$, et que 1 et 2 sont solutions de l'équation. Ensuite, le théorème sur les applications injectives strictement croissantes dit que v est injective sur $]-\infty,1/\ln 2[$ et sur $]1/\ln 2,+\infty[$. En particulier, l'équation $v(t) = 1$ admet au plus deux solutions (une dans chaque intervalle), qui sont donc 1 et 2.

II.C.2. Soit $P(x) = a_nx^n + \cdots + a_0$ un polynôme, où $a_n \neq 0$. Le coefficient dominant de $xP'(x/2)$ est $\dfrac{na_n}{2^{n-1}}$, et puisque l'égalité $P(x) = xP'(x/2)$ est vraie sur un intervalle d'intérieur non vide, on a :

$$\frac{na_n}{2^{n-1}} = a_n \implies n2^{1-n} = 1 \implies n \in \{1,2\}.$$

P est donc un polynôme de degré inférieur ou égal à 2, et donc $P(x) = ax^2 + bx$.

II.C.3.a. D'après la formule de Taylor-Young :

$$f(x) = f(0) + xf'(0) + \cdots + \frac{x^n}{n!} f^{(n)}(0) + o\left(x^n\right).$$

De même,

$$f'(x) = f'(0) + \cdots + \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}(0) + o\left(x^n\right),$$

d'où :

$$xf'(x/2) = xf'(0) + \cdots + \frac{x^p}{2^{p-1}} \frac{f^{(p)}(0)}{(p-1)!} + \cdots + o(x^n).$$

Si f appartient à $S(I)$, par unicité du développement limité, pour $p = 1, \ldots ,n$,

$$\frac{f^{(p)}(0)}{p!} = \frac{f^{(p)}(0)}{2^{p-1}(p-1)!}.$$

Ceci donne $f^{(p)}(0) = 0$, ou $p2^{1-p} = 1$.

II.C.3.b. Puisque $p2^{1-p} = 1 \iff p = 1{,}2$, $f^{(p)}(0) = 0$ sauf si $p = 1$ ou $p = 2$. D'ou :

$$f(x) = ax + bx^2 + o\left(x^n\right).$$

II.C.4. Si f est développable en série entière au point 0, f est n fois dérivable en 0, avec n aussi grand qu'on veut. En particulier, pour tout $n \geq 2$,

$$f(x) = ax + bx^2 + o(x^n).$$

Maintenant, si $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$ est le développement en série entière de f en 0, on a aussi :

$$f(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n + o(x^n).$$

Par unicité du développement limité, $a_p = 0$ si $p \neq 1{,}2$. On a donc $f(x) = ax + bx^2$ sur $]-R,R[$. Montrons, par récurrence sur $n \geq 1$, que $f(x) = ax + bx^2$ sur $[0,nR[$ (ce serait pareil sur $]-nR,0]$). C'est vrai pour $n = 1$. Maintenant, si $x \in [nR,(n+1)R[$, $x/2 \in [0,nR[$, et

$$f(x) = xf'(x/2) = ax + bx^2.$$

En particulier, f est un polynôme sur $\mathbb{R}$.

II.C.5. Si $x \mapsto e^{ax}$ était solution de I, on aurait, pour tout x de I,

$$e^{ax/2} = ax.$$

Ceci est faux sur un intervalle non réduit à un point.

II.C.6. Si f est une solution périodique, f est bornée (comme toute fonction continue périodique!). Du fait que $\dfrac{f(2x)}{2x} = f'(x)$, $f'(x)$ tend vers 0 si x tend vers $+\infty$. Soit T la période de f. Fixons $\varepsilon > 0$. Il existe $A > 0$ tel que, pour $x \geq A$, $|f'(x)| \leq \varepsilon$. Cette inégalité est en particulier vérifiée sur $[A,A+T]$. Maintenant, f' est périodique, et cette inégalité est par exemple vraie sur $[0,T]$. En faisant tendre ε vers 0, on trouve que f' est nulle sur $[0,T]$, et donc sur $\mathbb{R}$. En particulier, f est constante, et d'après la partie I, f est la fonction nulle.

Partie III

III.A.1. Remarquons d'abord que si g est solution de $E(I)$, alors h définie par $h(x) = g(2x)$ est aussi solution de $E(I)$. En effet,

$$h(x) = g(2x) = 2xg'(x) = xh'(x/2).$$

Nous prouvons alors le résultat par récurrence sur k. Il est vrai si $k = 0$, et s'il est vrai au rang k, remarquons que l'équation obtenue en **II.B.1.** donne encore :

$$x^{k+1}f^{(k+1)}(x) = 2^k x^k f^{(k)}(2x) - 2kx^k f^{(k)}(x).$$

Comme $S(I)$ est un sous-espace vectoriel, $x^{k+1}f^{(k+1)}(x)$ est dans $S(I)$.

III.A.2.a. Si $\dim S(I) = r < +\infty$, alors la famille de $(r+1)$ éléments $\big(f(x),xf'(x),\dots,x^r f^{(r)}(x)\big)$ est liée, et il existe des scalaires $\lambda_0,\dots,\lambda_r$ tels que :

$$\lambda_0 f(x) + \lambda_1 x f(x) + \dots + \lambda_r x^r f^{(r)}(x) = 0.$$

En éliminant les λ_j non nuls, on trouve bien que f vérifie une équation différentielle linéaire homogène d'ordre q, avec $1 \leq q \leq r$.

III.A.2.b. Soit $y(t) = f(e^t)$ définie sur $\mathbb{R}$. On a $y'(t) = e^t f'(e^t)$, et par récurrence :

$$y^{(k)}(t) = (e^t)^k f^{(k)}(e^t) + \mu_{k-1}(e^t)^{k-1}f^{(k-1)}(e^t) + \dots + \mu_1 e^t f(e^t),$$

où les μ_i sont des réels. En particulier, le système qui donne $y(t),\dots,y^{(q)}(t)$ en fonction de $f(e^t),e^t f'(e^t),\dots,(e^t)^q f^{(q)}(e^t)$ est triangulaire à coefficients sur la diagonale non nuls : il est donc inversible et :

$$(e^t)^k f^{(k)}(e^t) = a_0 y(t) + \dots + a_k y^{(k)}(t).$$

En faisant le changement de variables $x = e^t$ dans l'équation différentielle, et en remplaçant les termes en $(e^t)^k f^{(k)}(e^t)$ par les combinaisons linéaires des $y,\dots,y^{(k)}$ obtenues précédemment, on trouve que y est solution d'une équation différentielle homogène à coefficients constants.

III.A.2.c. Si $\lambda_0 y + \dots + \lambda_q y^{(q)} = 0$ est cette équation différentielle, on considère l'équation caractéristique $\lambda_0 + \lambda_1 z + \dots + \lambda_q z^q = 0$. Les solutions de cette équation sont les complexes $a_1,\dots,a_p$, de multiplicité respective $m_1,\dots,m_p$ avec $m_1 + \dots + m_p = q$. La forme générale d'une solution est alors :

$$y(x) = P_1(x)e^{a_1 x} + \dots + P_p(x)e^{a_p x},$$

où P_j est un polynôme de degré au plus $m_j - 1$.
Comme $f(x) = y(\ln x)$, on en déduit bien que f est combinaison linéaire d'applications de la forme $x \mapsto (\ln x)^\nu x^a$.

III.A.2.d. Bien sûr que non! Nous n'avons fait que raisonner par condition nécessaire. D'ailleurs, toutes les fonctions de la sorte ne sont pas solution de $S(I)$, puisqu'elles engendrent un espace vectoriel de dimension infinie, alors que l'on a supposé que $S(I)$ est de dimension finie.

III.B.1.a. On a :

$$\chi'(x) = \nu(\ln x)^{\nu-1}x^{a-1} + a(\ln x)^\nu x^{a-1}.$$

Puisque χ est élément de $S(I)$, on a :

$$(\ln x)^\nu x^a = \frac{\nu(\ln(x/2))^{\nu-1}}{2^{a-1}}x^a + \frac{a(\ln(x/2))^\nu}{2^{a-1}}x^a.$$

On simplifie par x^a, et on pose $t = \ln x$. La relation suivante est donc vérifiée pour tout réel t :

$$2^{a-1}t^\nu = \nu(t - \ln 2)^{\nu-1} + a(t - \ln 2)^\nu.$$

III.B.1.b. Ce polynôme en t est identiquement nul, et donc ses coefficients sont nuls. En particulier, le calcul de son coefficient dominant donne $2^{a-1} = a$.

III.B.1.c. Le terme constant vaut :

$$-a \times (-1)^\nu (\ln 2)^\nu - \nu \times (-1)^{\nu-1} (\ln 2)^{\nu-1} = 0,$$

ce qui donne

$$a(\ln 2)^\nu = \nu (\ln 2)^{\nu-1}.$$

En particulier, si $\nu = 1$, on a $a \ln 2 = 1$. Si $\nu \geq 2$, on évalue le polynôme en $t = \ln 2$ qui donne $(\ln 2)^\nu = 0$.

III.B.1.d. Bien sûr, il est impossible que $(\ln 2)^\nu = 0$. D'autre part, si $\nu = 1$ et donc $a = \frac{1}{\ln 2}$, on a :

$$\begin{aligned} 2^{a-1} &= \frac{2^a}{2} \\ &= \frac{1}{2} \exp\left(\frac{1}{\ln 2} \ln 2\right) = \frac{1}{2} \exp(1) \neq \frac{1}{\ln 2} = a. \end{aligned}$$

Il n'existe donc pas d'éléments de $S(I)$ de la forme $x \mapsto (\ln x)^\nu x^a$, pour ν entier naturel non nul.

III.B.2. On note encore $\chi(x) = x^a$. On a :

$$\begin{aligned} \chi(x) = x\chi'(x/2) &\iff x^a = \frac{a}{2^{a-1}} x^a \\ &\iff 2^{a-1} = a. \end{aligned}$$

III.B.3. L'équation précédente a été résolue dans $\mathbb{R}$ à la question **II.C.1.** Ses seules solutions sont 1 et 2, et on sait depuis la partie I que $x \mapsto x$ et $x \mapsto x^2$ sont solutions.

III.B.4.a. Il suffit de se limiter au cas où ω est strictement positif car $S(I)$ est stable par passage au conjugué.

III.B.4.b.

$$\begin{aligned} h \in S(I) &\iff 2^{a-1} = a \\ &\iff 2^{\alpha-1} 2^{i\omega} = \alpha + i\omega \\ &\iff \left\{ \begin{array}{rcl} 2^{\alpha-1} \cos(\omega \ln 2) &=& \alpha \\ 2^{\alpha-1} \sin(\omega \ln 2) &=& \omega \end{array} \right. \end{aligned}$$

III.B.4.c. On réitère le même raisonnement, mais en prenant la notation exponentielle $a = \rho e^{i\phi}$. On a :

$$2^{a-1} = 2^{\rho e^{i\phi} - 1} = \frac{1}{2} 2^{\rho \cos \phi} e^{i\rho \sin \phi \ln 2} = \rho e^{i\phi}.$$

D'où

$$2^{a-1} = a \iff \left\{ \begin{array}{l} 2^{\rho \cos \phi} = 2\rho \\ \exists n \in \mathbb{Z},\ \rho(\sin\phi)(\ln 2) = \phi + 2n\pi. \end{array} \right.$$

En posant $\theta = \phi + 2n\pi$, $\theta \in]2n\pi; (2n+1)\pi[$, on obtient le résultat (la condition $\omega > 0$ entraîne en effet que $\phi \in]0,\pi[$).

III.B.4.d. Prouvons d'abord que la condition est nécessaire. Si $h \in S(I)$, on considère n et θ donnés par la question précédente. On suppose dans un premier temps que $n \geq 0$. On a alors :

$$\rho = \frac{\theta}{(\ln 2) \sin \theta},$$

L'équation $2^{\rho \cos \theta} = 2\rho$ donne alors $g(\theta) = 0$. Ensuite,

$$\alpha = \rho \cos \theta = \frac{\theta \cot \theta}{\ln 2},$$

et
$$\omega = \rho \sin\theta = \frac{\theta}{\ln 2}.$$
Si $n < 0$, on fait pareil avec $\theta' = -\theta$. Réciproquement, il suffit de prouver qu'alors α et ω satisfont les conditions de **III.B.4.b.** Mais,
$$\begin{aligned}
2^{\alpha-1}\cos(\omega \ln 2) &= \frac{1}{2} 2^{\frac{\theta \cot\theta}{\ln 2}} \cos\theta \\
&= \frac{1}{2} e^{\theta\cot\theta}\cos\theta \\
&= \frac{\theta}{\ln 2}\cot\theta
\end{aligned}$$
puisque $g(\theta) = 0$. On prouve de même l'autre condition.

III.B.4.e. Si $\theta \in [0,\pi/2[$, on a :
$$\theta\cot\theta \leq 1$$
$$\text{et } \frac{\sin\theta}{\theta} \leq 1$$
$$\implies \frac{\ln 2}{2}\frac{\sin\theta}{\theta} e^{\theta\cot\theta} \leq \frac{\ln 2}{2} e < 1.$$
Si $\theta \geq \frac{\pi}{2}$, $\cot\theta \leq 0 \implies e^{\theta\cot\theta} \leq 1$. On en déduit que :
$$\frac{\ln 2}{2}\frac{\sin\theta}{\theta} e^{\theta\cot\theta} \leq \frac{\ln 2}{2} < 1.$$
Comme $g(\theta) = 0 \iff \frac{\ln 2}{2}\frac{\sin\theta}{\theta} e^{\theta\cot\theta} = 1$, $g(\theta) = 0$ n'a pas de solutions dans $]0,\pi[$.

III.B.4.f. Rappelons que $(\cot\theta)'(\theta) = -\dfrac{1}{\sin^2\theta}$. On a donc :
$$\begin{aligned}
g'(\theta) &= 2 - (\ln 2)\cos\theta e^{\theta\cot\theta} - (\ln 2)\sin\theta(\theta\cot\theta)' e^{\theta\cot\theta} \\
&= 2 - \ln 2 \cos\theta e^{\theta\cot\theta} - (\ln 2)\cos\theta e^{\theta\cot\theta} + \frac{\ln 2}{\sin\theta}\theta e^{\theta\cot\theta} \\
&= 2 + \ln 2 e^{\theta\cot\theta}\left(\frac{\theta - 2\sin\theta\cos\theta}{\sin\theta}\right) > 0.
\end{aligned}$$
g réalise donc une bijection de $]2n\pi; (2n+1)\pi[$ sur son image qui est un intervalle. Maintenant, si θ tend vers $2n\pi$ par valeurs supérieures, on pose $u = \theta - 2n\pi$, $u \to 0$. On a :
$$g(\theta) = 4n\pi + 2u - \ln 2 e^{2n\pi}\sin u e^{\cot u}.$$
Or,
$$\sin u e^{\cot u} \sim u e^{1/u} \to +\infty.$$
On en déduit que :
$$\lim_{\theta \to 2n\pi^+} g(\theta) = -\infty.$$
De même, on prouve que :
$$\lim_{\theta \to 2(n+1)\pi^-} g(\theta) = 4(n+1)\pi.$$
Il existe donc une seule solution à l'équation dans l'intervalle $]2n\pi; 2(n+1)\pi[$.

III.B.4.g. Si p et q sont tels que $\alpha_p = \alpha_q$, il résulte de la question **III.B.4.b.** que :

$$\theta_p \cot\theta_p = \theta_q \cot\theta_q.$$

Mais puisque $g(\theta_p) = g(\theta_q) = 0$, on a aussi :

$$\frac{\theta_p}{\sin\theta_p} = \frac{\theta_q}{\sin\theta_q}.$$

Les deux égalités précédentes entraînent que :

$$\cos\theta_p = \cos\theta_q.$$

Puisque θ_p et θ_q sont dans des intervalles du type $]2n\pi,2(n+1)\pi[$, on a $\theta_p = \theta_q + 2k\pi$. Mais alors $\cot\theta_p = \cot\theta_q$, et on en déduit que $\theta_p = \theta_q$, et donc $p = q$. Les (α_n) sont deux à deux distincts.
On supposera par exemple que $\alpha_1 < \alpha_2 < \ldots < \alpha_N$. Si on avait une relation $\lambda_1 h_1 + \cdots + \lambda_N h_N = 0$, avec $\lambda_N \neq 0$, on aurait :

$$\lambda_N h_N \left(1 + \frac{\lambda_{N-1}}{\lambda_N}\frac{h_{N-1}}{h_N} + \cdots + \frac{\lambda_1}{\lambda_N}\frac{h_1}{h_N}\right) = 0.$$

Mais si $j < N$, comme $\alpha_j < \alpha_N$, $\frac{h_j}{h_N} \to 0$ en l'infini, et donc :

$$\left(1 + \frac{\lambda_{N-1}}{\lambda_N}\frac{h_{N-1}}{h_N} + \cdots + \frac{\lambda_1}{\lambda_N}\frac{h_1}{h_N}\right) \to 1.$$

Or, le produit de deux fonctions continues est nul si, et seulement si, une des fonctions est nulle. Mais $\lambda_N h_N$ n'est pas nul, et la remarque précédente prouve que $\left(1 + \frac{\lambda_{N-1}}{\lambda_N}\frac{h_{N-1}}{h_N} + \cdots + \frac{\lambda_1}{\lambda_N}\frac{h_1}{h_N}\right)$ non plus.
$S(I)$ contient un sous-espace vectoriel de dimension infinie (celui engendré par les (h_n)). Donc $S(I)$ est lui-même de dimension infinie. En outre, les $\Re \circ h_n$ sont éléments de $S_{\mathbb{R}}(I)$, et on prouve de la même façon que ces solutions forment une famille libre. Donc $S_{\mathbb{R}}(I)$ est aussi de dimension infinie!

III.B.4.h. Sauf erreur, on a :

$$7.4540 < \theta_1 < 7.4541$$

On en déduit aisément les valeurs approchées de α_1 et ω_1.

Partie IV

IV.A. Voici une question très originale, qui oblige à se creuser l'esprit! Proposons deux erreurs trouvées dans les réponses :

1. La fonction φ définie à la question 2. est nulle aussi si $\|x\| = 1$.
2. La fonction s définie à la question 3) n'est pas forcément C^∞. Précisément, on a un problème en b et en c. Si les dérivées premières à gauche et à droite en b coïncident et sont nulles, il n'en est pas forcément de même des dérivées d'ordre supérieur. En particulier, rien n'oblige à ce que $\varphi''(0) = 0$.

IV.B.1. Montrons par récurrence sur $k \in \mathbb{N}$ qu'il existe un polynôme P_k tel que :

$$\forall t > 0,\ \psi^{(k)}(t) = P_k\left(\frac{1}{t}\right)e^{-1/t}.$$

C'est vrai pour $k=0$. Si le résultat est vrai au rang k, on le prouve au rang $k+1$ car :

$$\begin{aligned}\psi^{(k+1)}(t) &= \frac{-1}{t^2}P_k'\left(\frac{1}{t}\right)e^{-1/t}+\frac{1}{t^2}P_k\left(\frac{1}{t}\right)e^{-1/t}\\ &= \frac{1}{t^2}\left(P_k\left(\frac{1}{t}\right)-P_k'\left(\frac{1}{t}\right)\right)e^{-1/t}.\end{aligned}$$

On obtient le résultat en posant $P_{k+1}(X)=X^2\left(P_k(X)-P_k'(X)\right)$.
On en déduit par récurrence sur k que $\psi^{(k)}$ existe en 0, avec $\psi^{(k)}(0)=0$, $\psi^{(k)}$ est continue en 0. C'est clair si $k=0$, et si c'est vrai au rang k, par le théorème des accroissements finis,

$$\frac{\psi^{(k)}(h)-\psi^{(k)}(0)}{h}=\psi^{(k+1)}(c),$$

avec $c\in[0,h]$ ou $c\in[-h,0]$. En particulier, le taux d'accroissement est aussi petit que l'on veut. $\psi^{(k)}$ est dérivable en 0, et $\psi^{(k+1)}(0)=0$.

IV.B.2. La norme euclidienne est donnée par :

$$\|x\|=\sqrt{x_1^2+\cdots+x_n^2}.$$

La fonction de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$ définie par $x\mapsto 1-(x_1^2+\cdots+x_n^2)$ est $\mathbb{C}^\infty$, comme la fonction $\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ définie par $t\mapsto\psi(t)$. Par composition, φ est continue.
En outre, $\|x\|=1 \implies \varphi(x)=0$. Pourtant, le support de φ est $\overline{B(0,1[}=B(0,1]$.

IV.B.3.a. Remarquons par symétrie qu'il suffit de montrer que δ est C^∞ au voisinage de 0. Du fait que

$$\frac{1}{x(x-1)}=\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x},$$

on déduit que, sur $[0,1]$, on a :

$$\delta(x)=e^{\frac{1}{x-1}}\psi(x).$$

Puisque ψ est C^∞ en 0, δ l'est aussi (comme produit de fonctions C^∞).

IV.B.3.b. On peut par exemple utiliser le théorème suivant : si δ est une fonction continue et positive sur $[0,1]$, alors $\int_0^1\delta(t)dt=0$ si et seulement si δ est identiquement nulle. Ici, puisque $\delta(1/2)>0$, on a $\eta>0$.

IV.B.3.c. Par le théorème fondamental du calcul intégral, Δ est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$. En outre, si $x\in]0,1[$, $\Delta'(x)=\frac{\delta(x)}{\eta}>0$, et donc Δ est strictement croissante sur $[0,1]$. Pour la même raison, elle est constante de valeur 0 sur $]-\infty,0]$, et constante de valeur 1 sur $[1,+\infty[$.

IV.B.3.d. Il suffit de poser, comme dans l'indication

$$s(x)=\Delta\left(\frac{x-a}{b-a}\right)+\Delta\left(\frac{d-x}{d-c}\right)-1.$$

Cette fonction est C^∞ comme composée de fonctions C^∞, et il est quasi-trivial de vérifier que s satisfait les conditions imposées.

Partie V

V.A.1.a. Si $x=0$, le résultat est clair! Sinon, si $\mu_n|x|<1$, on a $|a_n|<\frac{1}{|x|}$ et

$$|\varphi_n(x)|\leq\frac{|x|^{n-1}}{n!}.$$

Si $n\geq 1$ et $\mu_n|x|\geq 1$, par construction de ξ, $\varphi_n(x)=0$.

V.A.1.b. Dans tous les cas, $|\varphi_n(x)| \leq \dfrac{|x|^{n-1}}{n!}$, et la série $\sum_{n\geq 1} \frac{|x|^{n-1}}{n!}$ est convergente. On en déduit que la série de terme général $\varphi_n(x)$ est convergente.

V.A.1.c. Puisque ξ est nulle sur $\mathbb{R} - [-1,1]$, on a clairement

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} |\xi^{(j)}(x)| = \sup_{x\in[-1,1]} |\xi^{(j)}(x)|.$$

Maintenant, $\xi^{(j)}$ est continue sur le compact $[-1,1]$, elle y est donc bornée et atteint ses bornes, ce qui justifie l'existence du réel m_j.

V.A.1.d. D'abord, si $|x| \geq \frac{1}{\mu_n}$, on a $\varphi_n^{(j)}(x) = 0$ et l'inégalité demandée est évidente. Si $|x| < \frac{1}{\mu_n}$, la formule de Leibniz donne :

$$\varphi_n^{(j)}(x) = \frac{a_n}{n!}\sum_{k=0}^{j}\frac{j!}{k!(j-k)!}n(n-1)\dots(n-k+1)x^{n-k}\mu_n^{j-k}\xi^{(j-k)}(\mu_n x).$$

On en déduit, puisque $|a_n| \leq \mu_n$, $j+1 \leq n$ et $\mu_n \geq 1$, les inégalités :

$$\begin{aligned} |\varphi_n^{(j)}(x)| &\leq \frac{1}{n!}\sum_{k=0}^{j}\frac{j!}{k!(j-k)!}n(n-1)\dots(n-k+1)x^{n-k}\mu_n^{n-k}M_j \\ &\leq \frac{M_j}{(n-j)!}\sum_{k=0}^{j}\frac{j!}{k!(j-k)!} \\ &\leq \frac{2^j M_j}{(n-j)!}. \end{aligned}$$

V.A.1.e. Il s'agit d'une question très très classique... Chaque série $\varphi_n^{(j)}$ converge normalement sur $\mathbb{R}$. On en déduit par exemple par récurrence sur j que ϕ est de classe C^j sur $\mathbb{R}$, sa dérivée d'ordre j étant donnée par :

$$\phi^{(j)}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty}\varphi_n^{(j)}(x).$$

En particulier,

$$\phi^{(j)}(0) = a_j.$$

V.A.1.f. Pour toute suite (a_n) de nombres réels, il existe une fonction ϕ de classe C^∞ tel que, pour tout j, $\phi^{(j)}(0) = a_j$. On peut donc construire une fonction $\mathbb{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ en choisissant les valeurs des dérivées successives en 0. L'idée plus naturelle de considérer la série de Taylor $\sum_{n\geq 0} a_n \frac{x^n}{n!}$ ne fonctionne pas, car cette série entière peut être de rayon de convergence nul.

V.A.2.a. ψ est C^∞ comme somme de fonction C^∞. On a $\psi^{(n)}(0) = \phi_a^{(n)}(0) + \phi_b^{(n)}(-1) = a_n$ et $\psi^{(n)}(1) = \phi_a^{(n)}(1) + \phi_b^{(n)}(0) = b_n$.

V.A.2.b. On considère les suites c (resp. d) définies par $c_n = \lambda^n a_n$ (resp. $d_n = \lambda^n b_n$), et ψ la fonction définie à la question précédente, mais pour les suites c et d. On pose enfin

$$F(x) = \psi(x/\lambda).$$

F répond à la question posée.

V.B.1. Par composée de fonction C^∞, $\hat{f}$ est C^∞. En outre,

$$\hat{f}'(t) = 2e^{2t}f'(e^{2t}).$$

Mais puisque $f \in S_{\mathbb{R}}(]0,+\infty[)$, on a

$$f'(e^{2t}) = \frac{f(2e^{2t})}{2e^{2t}}.$$

Puisque $2e^{2t} = e^{2(t+l)}$, on en déduit le résultat.

V.B.2. Il est d'abord clair que $\mathcal{T}$ est sous-espace vectoriel de $C^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$. Il est clair que la correspondance $f \mapsto \hat{f}$ est linéaire et injective, et par la question précédente envoie $S_{\mathbb{R}}(]0,+\infty[)$ dans $\mathcal{T}$. Il reste à prouver que pour tout g de $\mathcal{T}$, il existe $f \in S_{\mathbb{R}}(]0,+\infty[)$ avec $\hat{f} = g$. Pour cela, on pose, si $x > 0$,

$$f(x) = g\left(\frac{\ln x}{2}\right).$$

Très clairement, $\hat{f} = g$, et il n'est pas compliqué de vérifier que f est élément de $S_{\mathbb{R}}(]0,+\infty[)$ (il s'agit juste de remonter les calculs de la question précédente).

V.B.3.a. Il suffit de prouver la dérivabilité au point l. On vérifie d''abord que g_1 est continue en l. On applique ensuite le théorème de prolongement de la dérivée, en remarquant que,

$$\lim_{x\to l^-} g_1'(x) = \gamma'(l) = \gamma^{(2)}(0) = \lim_{x\to l^+} g_1'(x).$$

V.B.3.b. Par le théorème fondamental du calcul intégral, g_{-1} est continue et dérivable sur $[-l,0[$, et il suffit de prouver la dérivabilité en 0. On a :

$$\gamma_{-1}'(x) = \gamma(x+l) \to \gamma(l) = \gamma'(0)$$

si x tend vers 0. Le théorème de prolongement de la dérivée permet encore de conclure.

V.B.3.c. Comme demandé par l'énoncé, nous nous contentons d'un plan de preuve. Prouvons d'abord l'existence : on prolonge par récurrence γ sur des intervalles du type $[0,nl]$ de la même façon qu'à la question **V.B.3.a.** Le fait que $\gamma^{(n)}(l) = \gamma^{(n+1)}(0)$ pour tout n garantira que le prolongement sera C^∞ sur $[0,nl]$. On prolonge ensuite sur les intervalles du type $[-nl,l]$ par les techniques de la question **V.B.3.b.** Par construction, la fonction g construite est élément de $\mathcal{T}$, et a pour restriction γ au segment $[0,l]$.

Le prolongement est unique, car on n'a pas le choix de la construction. Si l'on souhaite que g vérifie l'équation fonctionnelle, les extensions construites dans les questions précédentes sont les seules possibles!

V.B.3.d. Cette application est bien définie, linéaire, et la question précédente entraîne qu'il s'agit d'un isomorphisme!

V.B.4.a. L'application est clairement linéaire, et elle est surjective d'après le théorème de Borel.

V.B.4.b. D'après les résultats des questions **V.B.2.** et **V.B.3.**, $S_{\mathbb{R}}(]0,+\infty[)$ est isomorphe à $\mathcal{H} = \ker\theta \oplus \mathcal{U}$. Il suffit de montrer que ce dernier espace est isomorphe à $\mathbb{R}^{\mathbb{N}} \times \mathcal{K}$. Pour cela, on définit l'application linéaire :

$$\begin{array}{rccc} \psi : & \ker\theta\oplus\mathcal{U} & \to & \mathbb{R}^{\mathbb{N}}\times\mathcal{K} \\ & h = f+g & \mapsto & (\theta(f+g),\tilde{f}) \end{array}$$

où $\tilde{f}$ est définie comme égale à f sur $[0,l]$ et nulle partout ailleurs. $\tilde{f}$ est C^∞ sur $\mathbb{R}$, car $f^{(n)}(0) = f^{(n)}(l) = 0$ pour tout n.

- ψ est injective : si $\psi(h) = 0$, avec $h = f + g$, on a $\theta(g) = 0$ et comme g est dans un supplémentaire du noyau, $g = 0$. D'autre part, si $\tilde{f} = 0$, f est identiquement nulle sur $[0,l]$, et est donc identiquement nulle. D'où $h = 0$.
- ψ est surjective : soit a une suite de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, et u un élément de $\mathcal{K}$. Puisque $\mathcal{U}$ est un supplémentaire du noyau, il existe $g \in \mathcal{U}$ tel que $\theta(g) = a$. On pose ensuite f la restriction de u à $[0,l]$. Il est clair que $f \in \ker\theta$, et si $h = f + g$, alors $\psi(h) = (a,u)$.

ψ est donc un isomorphisme d'espace vectoriel!

V.B.4.c. Modulo les séparations et regroupements en parties réelles et imaginaires :

$$\begin{aligned} S(]0,+\infty[) &\simeq S_{\mathbb{R}}(]0,+\infty[)\times S_{\mathbb{R}}(]0,+\infty[) \\ &\simeq (\mathbb{R}^{\mathbb{N}}\times\mathcal{K})\times(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}\times\mathcal{K}) \\ &\simeq (\mathbb{R}^{\mathbb{N}}\times\mathbb{R}^{\mathbb{N}})\times(\mathcal{K}\times\mathcal{K}) \\ &\simeq \mathbb{C}^{\mathbb{N}}\times\mathcal{K}_{\mathbb{C}}. \end{aligned}$$