Capès 2001 - Sujet 2 - Enoncé

Notations et objectifs du problème

Dans tout le problème, on note :
- $\mathbb{N}$ l'ensemble des entiers naturels;
- $\mathbb{N}^*$ l'ensemble des entiers naturels différents de 0;
- $\mathbb{Z}$ l'ensemble des entiers relatifs;
- $\mathbb{K}$ le corps qui sera toujours le corps des réels $\mathbb{R}$ ou le corps des complexes $\mathbb{C}$;

Pour tout couple d'éléments p et q de $\mathbb{N}$ tels que p est inférieur ou égal à q, on note :

$$[\![p,q]\!] = \{m; m \in \mathbb{N} \mid p \leq m \text{ et } m \leq q\}$$

et pour tout élément k de $\mathbb{N}$ on note $k\mathbb{N}$ l'ensemble des multiples de k, soit :

$$k\mathbb{N} = \{m \in \mathbb{N} \mid \exists n \in \mathbb{N},\, m = kn\}.$$

On note :

$\mathcal{S}(\mathbb{K})$ l'ensemble des suites d'éléments de $\mathbb{K}$.

Une suite $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sera parfois notée (u_n).

On rappelle que $\mathcal{S}(\mathbb{K})$ est muni d'une structure d'espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ pour les deux opérations suivantes :

$$\forall u = (u_n),\, \forall v = (v_n),\, \forall \lambda \in \mathbb{K},\, u + v = (u_n + v_n),\, \lambda u = (\lambda u_n).$$

On dit qu'un élément u de $\mathcal{S}(\mathbb{K})$ est une suite récurrente linéaire d'ordre deux lorsqu'il existe deux éléments a et b de $\mathbb{K}$ tels que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\, u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n \tag{1}$$

Si une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ n'est définie qu'à partir du rang 1, la relation (1) n'est bien entendu exigée que pour n dans $\mathbb{N}^*$.

L'objet du problème est d'étudier certains aspects des suites récurrentes linéaires d'ordre deux.

La première partie concerne leurs propriétés générales, et propose quelques exemples parmi lesquels la suite dite de Fibonacci définie par :

$$F_0 = 0,\, F_1 = 1; \qquad \forall n \in \mathbb{N},\, F_{n+2} = F_{n+1} + F_n.$$

Les parties II, III et IV sont indépendantes les unes des autres et concernent des problèmes particuliers dans lesquels interviennent de telles suites.

I. Étude générale et exemples

Dans cette partie, a et b sont deux éléments fixés de $\mathbb{K}$, et on note $\mathcal{R}(a,b)$ l'ensemble des éléments de $\mathcal{S}(\mathbb{K})$ qui vérifient la relation (1).

On appellera équation caractéristique l'équation suivante où t est inconnue :

$$t^2 - at - b = 0 \qquad (C)$$

I.A.

I.A.1. Montrer que pour tout x et tout y de $\mathbb{K}$, il existe un unique élément $u = (u_n)$ de $\mathcal{R}(a,b)$ tel que :

$$u_0 = x \qquad \text{et} \qquad u_1 = y.$$

Cet élément sera noté $U(x,y)$.

I.A.2. Montrer que $\mathcal{R}(a,b)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{S}(\mathbb{K})$ et que l'application :

$$U : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{K}^2 & \to & \mathcal{R}(a,b) \\ (x,y) & \mapsto & U(x,y) \end{array} \right.$$

est un isomorphisme de $\mathbb{K}^2$ sur $\mathcal{R}(a,b)$. En déduire la dimension de l'espace vectoriel $\mathcal{R}(a,b)$.

I.B.

I.B.1.

a. Soit r un élément de $\mathbb{K}$. Montrer que la suite (r^n) est un élément de $\mathcal{R}(a,b)$ si et seulement si r est solution de l'équation (C).

b. Montrer que si l'équation (C) admet une racine double r alors la suite (nr^n) appartient à $\mathcal{R}(a,b)$.

I.B.2.

a. On suppose que l'équation (C) admet deux racines distinctes r_1 et r_2 dans $\mathbb{K}$. Montrer que les deux suites (r_1^n) et (r_2^n) forment une base de $\mathcal{R}(a,b)$.

b. On suppose que (C) admet dans $\mathbb{K}$ une racine double r non nulle. Montrer que les deux suites (r^n) et (nr^n) forment une base de $\mathcal{R}(a,b)$.
Dans le cas où (C) admet 0 pour racine double, donner une base de $\mathcal{R}(a,b)$.

c. Pour cette question, $\mathbb{K}$ est le corps $\mathbb{R}$. On suppose que (C) admet deux racines complexes non réelles $re^{i\alpha}$ et $re^{-i\alpha}$ où r est un réel non nul, et α un réel tel que $0 < \alpha < \pi$. Montrer que les deux suites $(r^n \cos n\alpha)$ et $(r^n \sin n\alpha)$ forment une base de $\mathcal{R}(a,b)$.

I.C. Exemples

I.C.1.

a. Déterminer pour tout entier naturel n, le nombre de Fibonacci F_n en fonction de n.

b. Lorsque n tend vers l'infini, donner un équivalent simple de F_n en fonction du nombre φ (dit nombre d'or) :

$$\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

I.C.2.

Soit α, β, γ trois éléments de $\mathbb{K}$. Pour tout entier n supérieur ou égal à 1 on note M_n la matrice carrée d'ordre n dont le terme $m_{i,j}$ situé dans la i-ième ligne et la j-ième colonne est donné par :

$$\forall i \in [\![1,n]\!],\ \forall j \in [\![1,n]\!], \begin{cases} m_{i,j} = \alpha & \text{si } i = j \\ m_{i,j} = \beta & \text{si } i = j-1 \\ m_{i,j} = \gamma & \text{si } i = j+1 \\ m_{i,j} = 0 & \text{dans tous les autres cas.} \end{cases}$$

On note enfin D_n le déterminant de la matrice M_n.

a. Montrer que la suite $(D_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ vérifie une relation de récurrence linéaire d'ordre deux que l'on précisera. Quelle valeur doit-on donner à D_0 si l'on souhaite obtenir une suite indexée par $\mathbb{N}$ qui vérifie la même relation de récurrence?

b. On suppose $\beta = \gamma = 1$. Pour tout n de $\mathbb{N}^*$, calculer explicitement D_n lorsque α est égal à 2, puis lorsque α est égal à $\sqrt{2}$.

Soit M la matrice réelle d'ordre 4:

$$M = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

a. Calculer M^2 et M^3, et vérifier que M^3 est combinaison linéaire de M et M^2.

b. Montrer que pour tout entier n supérieur ou égal à 1, la matrice M^n peut s'écrire sous la forme :

$$M^n = a_n M + b_n M^2,$$

et calculer a_{n+1} et b_{n+1} en fonction de a_n et b_n.

c. Montrer que la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ vérifie une relation de récurrence linéaire d'ordre deux, et calculer les valeurs de a_n et b_n.

d. Généralisation : Soit P une matrice symétrique réelle de rang 2.

i. Prouver que P annule un polynôme de degré au plus trois, sans terme constant.

ii. En s'inspirant des calculs précédents, montrer qu'il est possible d'obtenir la matrice P^n pour tout entier n supérieur ou égal à 1 sans effectuer d'autre produit matriciel que les calculs de P^2 et P^3.

II. **Résolution d'une équation de Pell-Fermat**

Cette partie montre sur un exemple l'intervention des suites récurrentes linéaires d'ordre deux dans la résolution des équations dites de Pell-Fermat.

On cherche toutes les solutions appartenant à $\mathbb{N}^2$ de l'équation (2) suivante :

$$x^2 - 5y^2 = 1. \tag{2}$$

Par abus de langage, l'expression "solution de (2)" désignera seulement ce type de solutions.

II.A. Dans le plan euclidien $\mathcal{P}$ muni du repère orthonormé $(O; i,j)$, on considère l'hyperbole $\mathcal{H}$ d'équation :

$$x^2 - 5y^2 = 1.$$

Les solutions de (2) sont donc les éléments (x,y) de $\mathbb{N}^2$ qui sont les coordonnées d'un point de $\mathcal{H}$. On identifiera un tel élément et le point qu'il représente.

II.A.1. Déterminer toutes les solutions (x,y) de (2) pour lesquelles y est un élément de $[\![0,5]\!]$.

II.A.2. Soit (x_1,y_1) la solution de l'équation de (2) qui a la plus petite ordonnée strictement positive. On note $S_0 = (1,0)$ et $S_1 = (x_1,y_1)$, et on définit l'application g par :

$$g : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathcal{P} & \rightarrow & \mathcal{P} \\ (x,y) & \mapsto & (9x + 20y, 4x + 9y). \end{array} \right.$$

Montrer que la restriction de g à $\mathcal{H}$ est une bijection de $\mathcal{H}$ sur lui-même, et vérifie $g(S_0) = S_1$.

II.A.3. Soit (S_n) la suite de points de $\mathcal{P}$ définie par son premier terme S_0 et la relation de récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ S_{n+1} = g(S_n).$$

a. Montrer que pour tout élément de $\mathbb{N}$, les coordonnées (x_n,y_n) du point S_n sont les solutions de (2).

b. Montrer que les suites (x_n) et (y_n) vérifient une même relation de récurrence linéaire d'ordre deux.

c. Déterminer l'expression de x_n et de y_n en fonction de n.

II.A.4.

a. Montrer que pour tout élément n de $\mathbb{N}$ l'image par g de l'arc de la courbe $\mathcal{H}$ dont les extrémités sont les points S_n et S_{n+1} est l'arc d'extrémités S_{n+1} et S_{n+2}.

b. Montrer que les éléments (x_n,y_n), pour n dans $\mathbb{N}$, sont les seules solutions de l'équation (2).

II.B. *Le but de cette question est de montrer que le choix fait en* **II.A.2.** *pour l'application g est le seul qui permette la résolution de l'équation par la méthode précédente.*

Soit $\mathcal{L}$ une hyperbole quelconque de $\mathcal{P}$, A et B deux points distincts de $\mathcal{L}$.

II.B.1. Déterminer toutes les applications affines ψ de $\mathcal{P}$ dans $\mathcal{P}$, qui vérifient $\psi(\mathcal{L}) \subset \mathcal{L}$. *On pourra utiliser un repère porté par les asymptotes de l'hyperbole.*

II.B.2. Montrer que, parmi les applications déterminées en **II.B.1.**, trois exactement envoient le point A sur le point B, et vérifier que l'une d'entre elles est involutive.

II.B.3. En déduire que l'application g est la seule application affine non involutive pour laquelle l'image de $\mathcal{H}$ est $\mathcal{H}$ et l'image du point S_0 est le point S_1.

III. **Une propriété arithmétique**

Dans cette partie, on utilise le fait que les parties de $\mathbb{N}$ qui sont de la forme $k\mathbb{N}$ se caractérisent par des propriétés de symétrie pour trouver une relation arithmétique entre les éléments d'une suite récurrente linéaire d'ordre deux lorsque les coefficients de la relation de récurrence sont des entiers premiers entre eux.

Tous les entiers considérés sont des éléments de $\mathbb{Z}$. Pour tout couple (m,n) d'entiers, on note $m \wedge n$ le plus grand diviseur commun de m et de n, et la notation $m|n$ signifie que m est un diviseur de n. On considère deux entiers p et q premiers entre eux, et la suite récurrente (u_n) définie par :

$$u_0 = 1,\ u_1 = 1;$$
$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = pu_{n+1} + qu_n.$$

Il est clair que tous les termes de la suite sont des entiers.

III.A. Introduction : un exemple numérique

Dans le cas où $p = 1$, $q = -2$, $m = 30$ et $n = 45$, trouver à l'aide d'une calculatrice les termes u_m et u_n, puis comparer $u_m \wedge u_n$ et $u_{m\wedge n}$.

III.B. On dit qu'une partie A de $\mathbb{N}$ est autosymétrique lorsqu'elle contient 0 et vérifie la condition :

$$\forall n \in A,\ \forall j \in [\![0,n]\!],\ (n - j \in A \iff n + j \in A)$$

qui signifie que deux éléments de $\mathbb{N}$ qui sont symétriques par rapport à un élément de A se situent soit tous deux dans A, soit tous deux hors de A.

III.B.1. Montrer que pour tout entier naturel k, la partie $k\mathbb{N}$ est autosymétrique.

III.B.2. Réciproquement, montrer que si A est une partie autosymétrique non réduite à $\{0\}$, et si k désigne son plus petit élément strictement positif, alors $A = k\mathbb{N}$.

Il résulte donc de cette question qu'il y a identité entre les parties autosymétriques de $\mathbb{N}$ et celles qui sont de la forme $k\mathbb{N}$ pour un entier naturel k.

III.C. Pour tout entier strictement positif d on pose :

$$A(d) = \{n \in \mathbb{N};\ d|u_n\}.$$

III.C.1.

a. Soit n et d deux entiers naturels, d étant strictement positif. Montrer que si d est un diviseur de u_n, alors :

$$\forall k \in [\![0,n]\!],\ d|(u_{n+k} + (-q)^k u_{n-k}).$$

b. En déduire que si d est premier avec q, alors $A(d)$ est autosymétrique.

III.C.2.

a. On suppose que q n'est pas premier. Montrer que si c est un diviseur premier de q, alors :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ c|(u_{n+1} - pu_n)$$

et en déduire que u_0 est le seul élément de la suite (u_n) qui soit divisible par c.

b. Montrer que lorsque d et q ne sont pas premiers entre eux, alors $A(d) = \{0\}$.

III.D. Soit m et n deux entiers strictement positifs, $d = m \wedge n$ et $D = u_m \wedge u_n$.

III.D.1. En considérant $A(D)$, prouver la relation : D divise u_d.

III.D.2. En considérant de même $A(u_d)$, prouver la relation : u_d divise D.

III.D.3. Quelle relation lie D et u_d?

IV. **Les représentations de Fibonacci et de Zeckendorff**

Dans cette partie, on examine la possibilité d'écrire - éventuellement de manière unique - tout entier naturel comme somme d'éléments de la suite de Fibonacci.

Tous les entiers considérés sont des éléments de $\mathbb{N}$. On notera $(\nu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite de Fibonacci usuelle privée de ses deux premiers termes, c'est-à-dire la suite définie par :

$$\nu_0 = 1, \quad \nu_1 = 2;$$
$$\forall n \in \mathbb{N},\ \nu_{n+2} = \nu_{n+1} + \nu_n.$$

Il s'agit d'une suite d'entiers, dont les premiers termes sont :

$$1,2,3,5,8,13,21,34,55,\ldots.$$

On dit que l'entier m admet une représentation de Fibonacci (que l'on pourra abrégéer en F-représentation) lorsqu'il peut s'écrire sous la forme :

$$m = \sum_{k=0}^{n} a_k \nu_k,$$

où les coefficients a_k appartiennent à l'ensemble $\{0,1\}$.

On appelle écriture abrégée d'une telle représentation la notation $\overline{a_n a_{n-1} \ldots a_0}$.

De même qu'en écriture décimale, où l'on écrit en général plutôt 27 que 027, on évitera les zéros placés à gauche, de sorte que toute écriture abrégée, à l'exception de celle de 0, commencera par un 1 (ceci assure en outre l'unicité de l'écriture abrégée d'une représentation).

Exemple : La représentation $1 + 3 + 5 + 21$ du nombre 30 a pour écriture abrégée $\overline{1001101}$.

On appelle représentation de Zeckendorff de m (en abrégé : Z-représentation) toute représentation de Fibonacci où n'apparaissent pas deux nombres consécutifs de la suite (ν_n).

Exemple :$\overline{1001101}$ n'est pas une Z-représentation de 30 puisqu'elle utilise les nombres 3 et 5 qui sont consécutifs dans la suite (ν_n). En revanche, $\overline{1010001}$ en est une.

IV.A. Un exemple. Donner, en écriture abrégée, toutes les F-représentations du nombre 37 en précisant pour chacune si elle est ou non une Z-représentation. Il n'est pas demandé de justification.

IV.B. Deux égalités fondamentales.

Soit n un entier naturel, et s la partie entière de $n/2$. On définit les sommes σ_n et S_n par :

$$\sigma_n = \sum_{k=0}^{s} \nu_{n-2k}$$
$$S_n = \sum_{k=0}^{n} \nu_k.$$

Prouver les égalités :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \sigma_n = \nu_{n+1} - 1,$$
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad S_n = \nu_{n+2} - 2.$$

IV.C. La représentation de Zeckendorff

1. Soit $\sum_{k=0}^{n} a_k \nu_k$ une Z-représentation de l'entier m, telle que a_n soit différent de 0.
   a. Prouver l'inégalité : $m \leq \sigma_n$.
   b. En déduire que ν_n est le plus grand nombre des nombres de Fibonacci qui sont inférieurs ou égaux à m.
2. Prouver que tout entier m admet une unique Z-représentation.
3. Donner un algorithme permettant de calculer la Z-représentation d'un entier m donné. On décrira l'algorithme de préférence en français, sinon dans un langage pseudo-algorithmique clairement compréhensible.
   Cet algorithme pourra faire intervenir les éléments de la suite (ν_n) *sans en donner une méthode de calcul : on supposera qu'ils sont immédiatement disponibles.*
4. Donner en écriture abrégée la Z-représentation de 272, ainsi que, pour tout entier n, celles des nombres σ_n et S_n.
5. On note $z(m)$ le nombre de chiffres de l'écriture abrégée de la Z-représentation du nombre m, et $d(m)$ celui de son écriture décimale.
   (a) En utilisant la valeur de ν_n calculée au I.C.1., donner un équivalent simple de $z(m)$ au voisinage de l'infini.
   (b) Etudier le comportement du rapport $z(m)/d(m)$ lorsque m tend vers l'infini.

IV.D. Le nombre de représentations de Fibonacci d'un entier

La question précédente a montré que tout nombre entier admet au moins une représentation de Fibonacci : celle de Zeckendorff.

On s'intéresse au nombre de $\delta(m)$ *des F-représentations de l'entier* m.

1. Montrer que $\delta(m) = 1$ si et seulement si m est l'un des nombres σ_n.
2. Calculer pour tout entier n la valeur de $\delta(\nu_n)$.
3. Prouver que dans l'intervalle $[\![\nu_n - 1, \nu_{n+1} - 1]\!]$, la fonction δ prend la même valeur en des points symétriques par rapport au centre de l'intervalle.