MINISTÈRE
DE L'AGRICULTURE
ET DE L'ALIMENTATION

Liberté
Égalité
Fraternité

CONCOURS D'ACCÈS AU CORPS DES PROFESSEURS CERTIFIÉS DE L'ENSEIGNEMENT AGRICOLE ET À LA DEUXIÈME CATÉGORIE DES EMPLOIS DE PROFESSEUR DES ÉTABLISSEMENTS D'ENSEIGNEMENT AGRICOLE PRIVÉS

Concours : **EXTERNE**

Section : **MATHÉMATIQUES**

SESSION 2021

ÉPREUVE ÉCRITE D'ADMISSIBILITÉ N°2

Étude de thème (s)

(Coefficient : 2 – Durée : 5 heures)

Matériel(s) et document(s) autorisé(s) : calculatrice de poche

La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements interviendront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

L'usage des calculatrices de poche est autorisé, à condition qu'elles soient à fonctionnement autonome et qu'il ne soit pas fait usage d'imprimante.

Ce sujet comporte 15 pages y compris celle-ci.

Problème

Objectifs :
L'objectif de ce problème est d'étudier le mouvement d'un solide plongé dans un fluide visqueux. Le préambule permet d'étudier des problèmes numériques divers. La partie I permet de retrouver des résultats concernant les équations différentielles linéaires d'ordre 2 à coefficients constants. La partie II concerne l'étude du mouvement d'un solide plongé dans un fluide visqueux. On y détermine le mouvement du solide en fonction des différents paramètres en résolvant une équation différentielle linéaire d'ordre 2 à coefficients réels constants.

Notations
Soient $n \in \mathbb{N}$ et $\mathbb{K}$ l'ensemble égal à $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. On note alors les ensembles suivants :

- $\mathbb{K}[X]$ est l'ensemble des polynômes à coefficients réels.
- $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices carrées de taille n à coefficients dans $\mathbb{K}$.
- $\mathcal{G}l_n(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ inversibles.

Préambule

Dans ce préambule, nous abordons des thèmes, avec des exemples numériques, qui seront étudiés dans les parties I et II, dans des cas généraux. Les sept questions de ce préambule sont indépendantes.

1. Étude de nombres complexes :

a) Déterminer l'écriture exponentielle du nombre complexe suivant :

$$z_2 = (1 + i\sqrt{3})^4.$$

b) Factoriser dans $\mathbb{C}[X]$ les polynômes suivants et déterminer leurs racines complexes :

* $P_1(z) = z^2 + 1.$
* $P_2(z) = z^2 + 3z + 2.$
* $P_3(z) = z^2 + z + 1.$

2. Résolution d'une équation du second degré à coefficients complexes :

a) Écrire le nombre complexe $\Lambda = 2 + 2\sqrt{3}i$ sous forme exponentielle.

b) En déduire les solutions, sous forme exponentielle puis sous forme algébrique, dans le corps des nombres complexes $\mathbb{C}$, de l'équation :

$$z^2 = \Lambda.$$

c) On cherche à résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2 = -12 - 16i$. On pose $z = x + iy$ avec x et y deux nombres réels.

i) Montrer que cette équation est équivalente au système suivant :

$$\begin{cases} x^2 - y^2 &= -12, \\ xy &= -8. \end{cases}$$

ii) Montrer que si z est solution de l'équation alors $x^2 + y^2 = 20$.

iii) En justifiant votre réponse, en déduire l'ensemble des solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation :

$$z^2 = -12 - 16i.$$

d) Soit $Z = a + ib$ un nombre complexe donné avec a et b deux nombres réels non tous les deux nuls. Montrer que, dans $\mathbb{C}$, l'équation d'inconnue z :

$$z^2 = Z,$$

a toujours deux solutions complexes que l'on déterminera sous forme algébrique (on pourra être amené à différencier trois cas suivant b).

e) En déduire les solutions de l'équation :

$$z^2 = 4ab + 2i(a^2 - b^2), \text{ avec } (a, b) \in \mathbb{R}^2.$$

f) On considère trois nombres complexes α, β et γ tels que $\alpha \neq 0$. On veut résoudre l'équation :

$$\alpha z^2 + \beta z + \gamma = 0.$$

En notant $\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma$ le discriminant de cette équation, la question **2.d)** assure qu'il existe un nombre complexe δ tel que $\delta^2 = \Delta$.

i) Déterminer une valeur possible de δ lorsque l'on veut résoudre l'équation :

$$z^2 - 2(1 + i)z + 3 + 6i = 0.$$

ii) Donner la forme canonique du polynôme $z^2 - 2(1+i)z + 3 + 6i$ et en déduire ses racines complexes.

iii) Retrouver, dans le cas général, les solutions de l'équation :

$$\alpha z^2 + \beta z + \gamma = 0, \text{ avec } \alpha \neq 0.$$

g) Dans cette question, on pourra prendre appui sur le programme d'enseignement optionnel de mathématiques expertes de terminale générale dont un extrait est cité en annexes 2 et 3.

Vous êtes l'enseignant(e) en charge de l'enseignement optionnel de mathématiques expertes de terminale générale. À la lecture du programme en annexe 2, vous avez décidé de traiter durant l'année scolaire le problème possible : "Racines carrées d'un nombre complexe, équation du second degré à coefficients complexes".

i) Extraire des documents en annexe trois arguments pour justifier cette étude et les présenter succinctement tels que vous les exposeriez à la classe, en introduction des séances que vous souhaitez consacrer à ce problème.

ii) Expliquer selon quelle modalité vous souhaitez aborder ce problème avec vos élèves. Définir, si besoin, la temporalité prévue et les grandes étapes d'avancement du scénario envisagé.

iii) Parmi les six grandes compétences mathématiques rappelées en annexe 3, vous décidez d'en évaluer une seule lorsque vous traitez ce problème avec la classe.

Préciser cette compétence en expliquant votre choix et lister les indicateurs, en lien avec le problème, que vous choisiriez pour mesurer le niveau d'acquisition de cette compétence.

3. Étude d'équations différentielles :

a) Un parachutiste tombe à la vitesse de 55 m.s^{-1} au moment où son parachute s'ouvre. On fixe l'origine du temps (i.e. $t = 0$) à ce moment-là. Pour tout $t > 0$, on note $v(t)$ en m.s^{-1} la vitesse du parachutiste à l'instant t.

On admet que la résistance de l'air est :

$$R = \frac{Pv^2}{25}$$

où $P = m \times g$ est le poids du parachutiste avec son équipement (m est sa masse et $g = 9,81$ m.s^{-2}).
On admet que v est solution sur $\mathbb{R}_+$ de l'équation différentielle suivante :

$$\forall t \in \mathbb{R}_+,\ v'(t) = g\left(1 - \frac{v(t)^2}{25}\right).$$

i) En admettant que le parachutiste décélère, justifier que pour tout $t \in \mathbb{R}_+,\ v(t) > 5$.

On pose alors :

$$\forall t \in \mathbb{R}_+,\ z(t) = \frac{1}{v(t) - 5}$$

ii) Démontrer que z est solution de l'équation différentielle suivante :

$$\forall t \geqslant 0,\ z'(t) - \frac{2g}{5}z(t) - \frac{g}{25} = 0.$$

iii) En déduire l'expression de $z(t)$, pour tout $t \geqslant 0$.

iv) Justifier que $z(t)$ admet une limite en $+\infty$ et la déterminer.

v) En déduire la limite de $v(t)$ en $+\infty$.

vi) Commenter ce résultat.

b) Résoudre sur $\mathbb{R}$ le problème de Cauchy suivant :

$$\begin{cases} y''(t) + 4y'(t) + 4y(t) = e^t, \\ y(0) = 0, \\ y'(0) = 1. \end{cases}$$

4. Études de fonctions exponentielles :

a) Soit $k > 0$. Dresser le tableau de variations complet sur $\mathbb{R}_+$ de la fonction $t \mapsto te^{-kt}$.

b) Soit $z = a + ib$ avec a et b deux réels.

i) Donner l'expression du conjugué de e^z.

ii) Justifier que la fonction $t \mapsto e^{zt}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et déterminer sa dérivée.

5. Étude d'un système linéaire :
Considérons le système linéaire suivant, dont les inconnues sont réelles :

$$\begin{cases} x_1 & - & x_2 & + & x_3 & = & 2, \\ -x_1 & + & 4x_2 & + & 6x_3 & = & -1, \\ 3x_1 & - & 2x_2 & + & 3x_3 & = & 4. \end{cases}$$

Justifier que ce système a une unique solution.

6. Étude d'un sous-espace vectoriel :
Considérons la partie de $\mathbb{R}^3$ suivante :

$$F = \left\{ (x; y; z) \in \mathbb{R}^3 / \ x + y - z = 0 \right\}.$$

Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ dont on déterminera une base.

7. Diagonalisation d'une matrice de $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$:
Soit la matrice $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ définie par :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

a) Montrer que la matrice A est diagonalisable sur $\mathbb{C}$.

b) Déterminer une matrice inversible $P \in \mathcal{G}l_2(\mathbb{C})$ et une matrice diagonale $D \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ telles que :

$$A = P.D.P^{-1}.$$

Partie I : Généralités sur les équations différentielles linéaires d'ordre 2

Soient $(a, b, c) \in \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^2$ et ψ une fonction définie et continue sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{C}$. On considère l'équation différentielle (E) d'inconnue y définie par :

$$(E) \ : \ \forall t \in \mathbb{R}, \ ay''(t) + by'(t) + cy(t) = \psi(t),$$

et son équation différentielle homogène associée, notée (H), définie par :

$$(H) \ : \ \forall t \in \mathbb{R}, \ ay''(t) + by'(t) + cy(t) = 0.$$

On notera :

— $S_{\mathbb{C}}(E)$ et $S_{\mathbb{C}}(H)$ les ensembles de fonctions définies sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{C}$ qui sont solutions respectivement de (E) et de (H).

— Dans le cas où $(a, b, c) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^2$, on notera $S_{\mathbb{R}}(E)$ et $S_{\mathbb{R}}(H)$ les ensembles de fonctions définies sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ qui sont solutions respectivement de (E) et de (H).

A. Étude de l'équation homogène sur $\mathbb{C}$

1. Montrer que l'ensemble $S_{\mathbb{C}}(H)$ est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel.

2. Démontrer que pour tout $r \in \mathbb{C}$, la fonction $\phi_r : t \mapsto e^{rt}$ est solution de (H) si et seulement si r est solution de l'équation caractéristique (EC) associée à (H) définie par :

$$(EC) : ar^2 + br + c = 0.$$

3. Justifier que (EC) possède au moins une solution dans $\mathbb{C}$.

4. **Cas particulier :** étude de l'équation (EC) dans le cas où **a, b et c sont des réels avec a non nul** ; pour cette question, vous pouvez vous appuyer sur les extraits de programmes mis en annexe à la fin de ce sujet.

a) Expliquer dans quelle classe la démonstration de la résolution de l'équation (EC) pourrait être exposée.

b) Lister les prérequis nécessaires à ces élèves pour aborder la résolution de l'équation (EC).

c) Présenter la résolution de l'équation (EC) telle que l'on pourrait l'exposer devant une telle classe.

d) Énoncer un approfondissement que l'on pourrait aborder avec la classe choisie en question **4.a)**.

e) Écrire, en langage Python, un programme de résolution de l'équation (EC) lorsque a, b et c sont réels avec a non nul.

Pour les questions 5 , 6 et 7 qui suivent, on se place dans le cas général.

5. Soient $r_1 \in \mathbb{C}$ une racine de (EC) et z une fonction deux fois dérivable, définie sur $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{C}$. Notons $\Delta = b^2 - 4ac$ le discriminant de l'équation (EC).

a) En considérant la fonction $f : t \mapsto z(t)e^{r_1 t}$, montrer que f est solution de (H) si et seulement si z' est solution de l'équation différentielle suivante :

$$(H_{r_1}) : \ \forall t \in \mathbb{R}, \ ay'(t) + (2ar_1 + b)y(t) = 0.$$

b) Dans le cas où $\Delta \neq 0$, on notera r_1 et r_2 les solutions de (EC). On pose :

$$\mathcal{A} = \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{C} \\ t & \mapsto & \alpha e^{r_1 t} + \beta e^{r_2 t} \end{array} , \ (\alpha, \beta) \in \mathbb{C}^2 \right\},$$

i) Soit $f \in S_{\mathbb{C}}(H)$ et $z : t \mapsto f(t)e^{-r_1 t}$. Justifier que z' est solution de (H_{r_1}) et en déduire que $f \in \mathcal{A}$.

ii) Montrer que $S_{\mathbb{C}}(H) = \mathcal{A}$.

c) Dans le cas où $\Delta = 0$, on notera r_0 la racine double de l'équation (EC). À l'aide de l'équation (H_{r_1}), montrer l'équivalence suivante :

$$f \in S_{\mathbb{C}}(H) \iff \exists(\alpha, \beta) \in \mathbb{C}^2 / \ f(t) = (\alpha t + \beta)e^{r_0 t}.$$

6. En déduire une base de $S_{\mathbb{C}}(H)$ et sa dimension.

7. Soient $(t_0, y_0, y_1) \in \mathbb{R} \times \mathbb{C}^2$. Dans le cas où $\Delta \neq 0$, montrer qu'il existe une unique solution f de (H) vérifiant

$$\begin{cases} f(t_0) = y_0, \\ f'(t_0) = y_1. \end{cases}$$

B. Cas particulier de l'équation homogène sur $\mathbb{R}$

Supposons $(a, b, c) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^2$ tels que $\Delta < 0$.

8. Justifier que (EC) possède deux solutions complexes distinctes qui sont conjuguées.

9. Soit $(r, w) \in \mathbb{R}^2$ tel que $r + iw$ et $r - iw$ soient les racines de l'équation (EC). Montrer l'équivalence suivante :

$$f \in S_{\mathbb{R}}(H) \iff \exists(\gamma, \delta) \in \mathbb{C}^2 / \ f(t) = (\gamma \cos(wt) + \delta \sin(wt))e^{rt}.$$

C. Équation avec second membre dans le cas particulier a=b=c=1

10. Supposons qu'il existe $(\eta_1, \eta_2, \lambda) \in \mathbb{R}^3$ tels que :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \ \psi(t) = \eta_1 \cos(\lambda t) + \eta_2 \sin(\lambda t).$$

a) Dans le cas où $a = b = c = 1$, montrer qu'il existe $(\mu_1, \mu_2) \in \mathbb{R}^2$ tels que la fonction $f_p : t \mapsto \mu_1 \cos(\lambda t) + \mu_2 \sin(\lambda t)$ soit solution particulière de (E).

b) En déduire l'ensemble $S_{\mathbb{R}}(E)$, dans le cas où $a = b = c = 1$.

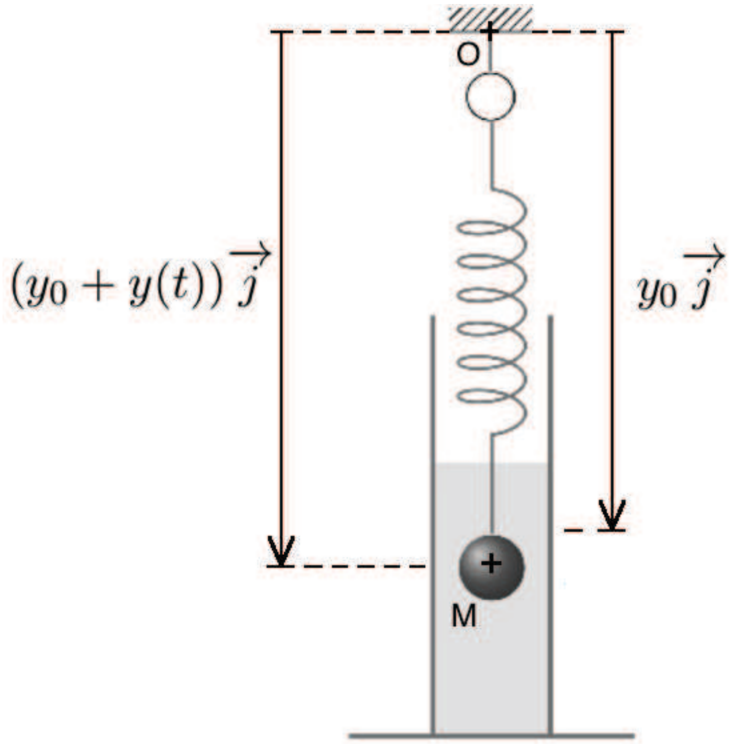
Partie II : Contrôle du mouvement d'un solide plongé dans un fluide

On considère un corps assimilé à un point M de masse m non nulle, suspendu à un ressort et plongé dans un fluide visqueux.

On repère la position de M sur un axe vertical, de repère $(O; \overrightarrow{j})$ orienté vers le bas. On suppose que le corps admet une position d'équilibre au repos à la hauteur y_0. Lorsque le corps est en mouvement, on note alors $y(t)$ la hauteur des oscillations autour de ce point d'équilibre. On a alors :

$$\overrightarrow{OM} = (y_0 + y(t))\,\overrightarrow{j},$$

avec $y : t \mapsto y(t)$ une fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ et deux fois dérivable.



Système sans contrôle

On admet que trois forces agissent sur le corps :

* la force d'inertie proportionnelle à y'' de coefficient $m > 0$ (où m est la masse du système) ;
* la force de viscosité du fluide proportionnelle à y' de coefficient de $b \geqslant 0$ (b est appelé coefficient de viscosité) ;
* la force de rappel du ressort proportionnelle à y de coefficient $c > 0$ (c est appelé coefficient de raideur).

Dans cette partie, les paramètres m et c sont fixés et on souhaite analyser l'influence de la viscosité (i.e. du paramètre b) sur le comportement du corps.

On admet que la fonction inconnue y vérifie le problème de Cauchy suivant :

$$\begin{cases} (H_b) : \forall t \geqslant 0,\ my''(t) + by'(t) + cy(t) = 0, \\ y(0) = 0, \\ y'(0) = 1. \end{cases} \tag{1}$$

1. En justifiant la réponse, dire si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses :

* (H_b) est linéaire

* (H_b) est d'ordre 1
* (H_b) est non-homogène
* (H_b) est à coefficients constants.

2. Résoudre le problème de Cauchy (1) dans les cas suivants :

* viscosité faible : $b \neq 0$ tel que $b^2 - 4mc < 0$;
* viscosité forte : $b \neq 0$ tel que $b^2 - 4mc > 0$.

Dans chaque cas, donner l'allure de la courbe représentative de y et montrer que la limite de y en $+\infty$ est nulle. Interpréter ce résultat dans le contexte de l'énoncé.

3. Dans le cas de la viscosité nulle ($b = 0$), on se propose de résoudre le problème de Cauchy (1) par deux méthodes différentes :

a) Méthode 1 : résoudre (1) à l'aide de la **partie I-B**. Donner la limite de la solution en $+\infty$ et interpréter ce résultat dans le contexte de l'énoncé.

b) Méthode 2 : résolution à l'aide de matrices.

i) En posant :

$$\forall t \geqslant 0,\ X(t) = \begin{pmatrix} y(t) \\ y'(t) \end{pmatrix},$$

déterminer une matrice $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ telle que :

$$y \text{ est solution de } (H_0) \iff \forall t \geqslant 0,\ X'(t) = AX(t).$$

ii) Montrer que les valeurs propres de A sont les racines (r_1, r_2) de l'équation caractéristique (EC) associée à (H_0).

iii) Déterminer $P \in \mathcal{G}l_2(\mathbb{C})$ et $D = \begin{pmatrix} r_1 & 0 \\ 0 & r_2 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ telles que :

$$A = PDP^{-1}.$$

iv) Posons pour tout $t \geqslant 0$, $E_D(t) = \begin{pmatrix} e^{r_1 t} & 0 \\ 0 & e^{r_2 t} \end{pmatrix}$. Justifier alors que :

$$\forall t \geqslant 0,\ X(t) = PE_D(t)P^{-1}X(0).$$

v) En déduire $y(t)$.

4. On suppose que $b \neq 0$ et que $b^2 - 4mc = 0$:

a) Déterminer l'unique solution y de (1).

b) Soit $\varphi > 0$ et on pose $m = 1$. En vous appuyant sur la question **4.a)** du préambule, déterminer une condition suffisante sur c afin de vérifier :

$$\forall t \geqslant 0,\ |y(t)| \leqslant \varphi.$$

Contrôle du ressort en temps long

5. On suppose maintenant que M est soumis aussi à une force sinusoïdale de pulsation $\lambda > 0$ et d'amplitude $k > 0$.

On admet que la fonction inconnue y vérifie l'équation différentielle suivante :

$$(E_b) : \forall t \in \mathbb{R}^+,\ my''(t) + by'(t) + cy(t) = k\sin(\lambda t).$$

a) On suppose que $b = 0$ et $\lambda = \sqrt{\frac{c}{m}}$.

i) Déterminer $(A, B) \in \mathbb{R}^2$ tels que $t \mapsto t\left(A\cos\left(\sqrt{\frac{c}{m}}t\right) + B\sin\left(\sqrt{\frac{c}{m}}t\right)\right)$ soit une solution particulière de (E_0).

ii) En déduire l'allure de la courbe représentative de y et sa limite éventuelle en $+\infty$.

b) On suppose que $b \neq 0$ ou $\lambda \neq \sqrt{\frac{c}{m}}$:

i) Montrer qu'il existe une solution particulière y_p de l'équation (E_b) de la forme :

$$y_p : t \mapsto A\cos(\lambda t) + B\sin(\lambda t).$$

ii) En déduire l'allure de $y_p(t)$ en $+\infty$.

Annexe 1 : Extrait du programme de mathématiques de première générale :

Équations, fonctions polynômes du second degré

Contenus

- Fonction polynôme du second degré donnée sous forme factorisée. Racines, signe, expression de la somme et du produit des racines.
- Forme canonique d'une fonction polynôme du second degré. Discriminant. Factorisation éventuelle. Résolution d'une équation du second degré. Signe.

Capacités attendues

- Étudier le signe d'une fonction polynôme du second degré donnée sous forme factorisée.
- Déterminer les fonctions polynômes du second degré s'annulant en deux nombres réels distincts.
- Factoriser une fonction polynôme du second degré, en diversifiant les stratégies : racine évidente, détection des racines par leur somme et leur produit, identité remarquable, application des formules générales.
- Choisir une forme adaptée (développée réduite, canonique, factorisée) d'une fonction polynôme du second degré dans le cadre de la résolution d'un problème (équation, inéquation, optimisation, variations).

Démonstration

- Résolution de l'équation du second degré.

Approfondissements possibles

- Factorisation d'un polynôme du troisième degré admettant une racine et résolution de l'équation associée.
- Factorisation de $x^n - 1$ par $x - 1$, de $x^n - a^n$ par $x - a$.
- Déterminer deux nombres réels connaissant leur somme s et leur produit p comme racines de la fonction polynôme $x \mapsto x^2 - sx + p$.

Annexe 2 : Extrait du programme de mathématiques expertes de terminale générale :

- **Équations polynomiales**

On utilise librement la notion de fonction polynôme à coefficients réels, plus simplement appelée polynôme. On admet que si une fonction polynôme est nulle, tous ses coefficients sont nuls.

Contenus

- Solutions complexes d'une équation du second degré à coefficients réels.
- Factorisation de $z^n - a^n$ par $z - a$.
- Si P est un polynôme et $P(a) = 0$, factorisation de P par $z - a$.
- Un polynôme de degré n admet au plus n racines.

Capacités attendues

- Résoudre une équation polynomiale de degré 2 à coefficients réels.
- Résoudre une équation de degré 3 à coefficients réels dont une racine est connue.
- Factoriser un polynôme dont une racine est connue.

Démonstrations

- Factorisation de $z^n - a^n$ par $z - a$. Factorisation de $P(z)$ par $z - a$ si $P(a) = 0$.
- Le nombre de solutions d'une équation polynomiale est inférieur ou égal à son degré.

Problèmes possibles

- Racines carrées d'un nombre complexe, équation du second degré à coefficients complexes.
- Formules de Viète.
- Résolution par radicaux de l'équation de degré 3.

Annexe 3 : Extrait du préambule du programme d'enseignement optionnel de mathématiques expertes de terminale générale :

Préambule

Intentions majeures

L'enseignement optionnel de mathématiques expertes est destiné aux élèves qui ont un goût affirmé pour les mathématiques et qui visent des formations où les mathématiques occupent une place prépondérante. Il permet d'aborder de façon approfondie d'autres champs d'étude que ceux proposés par l'enseignement de spécialité.

Il est conçu à partir des intentions suivantes :

- permettre à chaque élève de consolider les acquis de l'enseignement de spécialité de première, de développer son goût des mathématiques, d'en apprécier les démarches et les objets afin qu'il puisse faire l'expérience personnelle de l'efficacité des concepts mathématiques et de la simplification et la généralisation que permet la maîtrise de l'abstraction ;
- développer des interactions avec d'autres enseignements de spécialité ;
- préparer aux études supérieures.

Le programme de mathématiques expertes définit un ensemble de connaissances et de compétences, réaliste et ambitieux, qui s'appuie sur le programme de la spécialité de classe de première dans un souci de cohérence, en réactivant les notions déjà étudiées et en y ajoutant un nombre raisonnable de nouvelles notions, à étudier de manière suffisamment approfondie.

- **Compétences mathématiques**

Dans le prolongement des cycles précédents, on travaille les six grandes compétences :

- **chercher**, expérimenter, en particulier à l'aide d'outils logiciels ;
- **modéliser**, faire une simulation, valider ou invalider un modèle ;
- **représenter**, choisir un cadre (numérique, algébrique, géométrique ...), changer de registre ;
- **raisonner**, démontrer, trouver des résultats partiels et les mettre en perspective ;
- **calculer**, appliquer des techniques et mettre en œuvre des algorithmes ;
- **communiquer** un résultat par oral ou par écrit, expliquer une démarche.

La résolution de problèmes est un cadre privilégié pour développer, mobiliser et combiner plusieurs de ces compétences. Cependant, pour prendre des initiatives, imaginer des pistes de solution et s'y engager sans s'égarer, l'élève doit disposer d'automatismes. Ceux-ci facilitent en effet le travail intellectuel en libérant l'esprit des soucis de mise en œuvre technique et élargissent le champ des démarches susceptibles d'être engagées.

L'installation de ces réflexes est favorisée par la mise en place d'activités rituelles, notamment de calcul (mental ou réfléchi, numérique ou littéral). Elle est menée conjointement avec la résolution de problèmes motivants et substantiels, afin de stabiliser connaissances, méthodes et stratégies.

- **Diversité de l'activité de l'élève**

La diversité des activités mathématiques proposées doit permettre aux élèves de prendre conscience de la richesse et de la variété de la démarche mathématique, et de la situer au sein de l'activité scientifique. Cette prise de conscience est un élément essentiel dans la définition de leur orientation.

Il importe donc que cette diversité se retrouve dans les travaux proposés à la classe. Parmi ceux-ci, les travaux écrits faits hors du temps scolaire (exercices réguliers d'entraînement ou devoirs à la maison) permettent, à travers l'autonomie laissée à chacun, le développement des qualités d'initiative, tout en assurant la stabilisation des connaissances et des compétences. Ils doivent être conçus de façon à prendre en compte la diversité et l'hétérogénéité des élèves.

Le calcul est un outil essentiel pour la résolution de problèmes. Il importe de poursuivre l'entraînement des élèves dans ce domaine par la pratique régulière du calcul numérique et du calcul littéral, sous ses diverses formes : mentale, écrite, instrumentée.

Quelques lignes directrices pour l'enseignement

Le professeur veille à créer dans la classe de mathématiques une atmosphère de travail favorable aux apprentissages, combinant bienveillance et exigence. Il faut développer chez chaque élève des attitudes positives à l'égard des mathématiques et sa capacité à résoudre des problèmes stimulants.

L'élève doit être incité à s'engager dans une recherche mathématique, individuellement ou en équipe, et à développer sa confiance en lui. Il cherche, essaie des pistes, prend le risque de se tromper. Il ne doit pas craindre l'erreur, car il sait qu'il peut en tirer profit grâce au professeur, qui l'aide à l'identifier, à l'analyser et la comprendre. Ce travail sur l'erreur participe à la construction de ses apprentissages.

Les problèmes proposés aux élèves peuvent être internes aux mathématiques, provenir de l'histoire des mathématiques, être issus des autres disciplines ou du monde réel ; on prend cependant garde que la simple inclusion de références au monde réel ne suffit pas toujours à transformer un exercice de routine en un bon problème. Dans tous les cas, ces problèmes doivent être bien conçus et motivants, afin de développer les connaissances et compétences mathématiques du programme.

Le professeur doit veiller à établir un équilibre entre divers temps d'apprentissage :

- les temps de recherche, d'activité, de manipulation ;
- les temps de dialogue et d'échange, de verbalisation ;
- les temps de cours, où le professeur expose avec précision, présente certaines démonstrations et permet aux élèves d'accéder à l'abstraction ;
- les temps où sont présentés et discutés des exemples, pour vérifier la bonne compréhension de tous les élèves ;
- les exercices et problèmes, allant progressivement de l'application la plus directe au thème d'étude ;
- les rituels, afin de consolider les connaissances et les méthodes.

Organisation du programme

Le programme propose des problèmes possibles, mais en aucun cas obligatoires. Leur nature est très diverse : certains d'entre eux sont un petit prolongement des notions du programme ; d'autres ouvrent des perspectives plus larges. Ils permettent une différenciation pédagogique et offrent des pistes pour l'épreuve orale terminale.