MINISTÈRE
DE L'AGRICULTURE
ET DE L'ALIMENTATION

Liberté
Égalité
Fraternité

CONCOURS D'ACCÈS AU CORPS DES PROFESSEURS CERTIFIÉS DE L'ENSEIGNEMENT AGRICOLE ET À LA DEUXIÈME CATÉGORIE DES EMPLOIS DE PROFESSEUR DES ÉTABLISSEMENTS D'ENSEIGNEMENT AGRICOLE PRIVÉS

Concours : **EXTERNE**

Section : **MATHÉMATIQUES**

SESSION 2021

ÉPREUVE ÉCRITE D'ADMISSIBILITÉ N°1

Culture Disciplinaire

(Coefficient : 2 – Durée : 5 heures)

Matériel(s) et document(s) autorisé(s) : calculatrice de poche

La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements interviendront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

L'usage des calculatrices de poche est autorisé, à condition qu'elles soient à fonctionnement autonome et qu'il ne soit pas fait usage d'imprimante.

Le sujet est constitué de trois exercices et comporte huit pages, dont celle-ci.

Exercice 1 :

Préciser pour chacune des propositions suivantes si elle est vraie ou fausse puis justifier votre réponse.

Proposition 1 :

Soit p un réel positif. On considère un carré de périmètre p et un disque de périmètre p. Le disque a une aire supérieure à celle du carré.

Proposition 2 :

On désigne par z un nombre complexe, $\left|\dfrac{z+\mathrm{i}}{z-\mathrm{i}}\right| = 1$ si et seulement si z est un nombre réel.

Proposition 3 :

Soient A, B et C des matrices carrées 2×2 : $\quad A \times B = A \times C \quad \Rightarrow \quad B = C$.

Proposition 4 :

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par la donnée de $u_0 = 0,5$ et la relation $u_{n+1} = u_n^2$ pour tout entier naturel n. La suite (u_n) est décroissante.

Proposition 5 :

La fonction $f : a \longmapsto \int_a^1 \ln(t)dt$ définie sur $]0;1]$ admet comme limite $-\infty$ en 0.

Proposition 6 :

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite qui converge vers 0, alors ou bien $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{u_n} = +\infty$, ou bien $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{u_n} = -\infty$.

Proposition 7 :

La fonction sinus hyperbolique est définie pour tout réel x par $\sinh(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$.

Tout réel admet un antécédent par cette fonction.

Proposition 8 :

On considère la fonction **seuil** suivante écrite en langage Python :

```
def seuil(a):
    S=0
    n=1
    while S<a:
        S=S+6/n**2
        n=n+1
    return n
```

Pour tout réel $a > 1$, l'exécution de **seuil**(a) affiche une valeur.

Proposition 9 :

A et B sont deux événements tels que $P(A) = 0,6$, $P_A(B) = 0,3$ et $P_{\bar{A}}(\bar{B}) = 0,9$. On a $P_B(A) = \frac{9}{11}$.

Proposition 10 :

Dans l'espace rapporté au repère orthonormal $\left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$ on considère les vecteurs $\vec{u}\ (1, -1, 0)$ et $\vec{v}\ (1, 1, 0)$ ainsi que le point $A\ (0, 0, 2)$. La droite (OA) est l'unique droite de l'espace perpendiculaire à la fois aux droites $(O, \vec{u})$ et $(A, \vec{v})$.

Exercice 2 :

Partie A. Étude d'une fonction.

1. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 2x e^{-x^2} & \text{si } x \geqslant 0\,. \end{cases}$$

(a) Démontrer que la fonction f est continue en 0. Est-elle dérivable en 0 ? Justifier.

(b) Étudier les variations de f sur $]0\,;+\infty[$ ainsi que sa limite en $+\infty$ puis construire son tableau de variation.

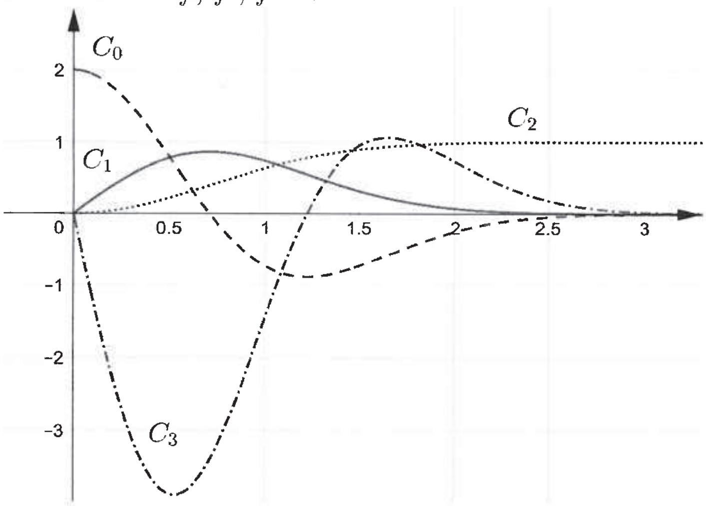
(c) Démontrer que la courbe représentative de f admet un point d'inflexion sur $[0\,;+\infty[$ et déterminer ses coordonnées.

2. On note F la fonction définie sur $[0\,;+\infty[$ par : $F(x) = \displaystyle\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$.

(a) Déterminer l'expression de $F(x)$ en fonction de x.

(b) Déterminer $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} F(x)$.

3. Dans le graphique ci-dessous sont représentées les fonctions f, f', f'' et F sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$. Indiquer, sans justifier, les courbes représentatives qui correspondent à chacune des fonctions f, f', f'' et F.



Partie B. Une équation différentielle

On considère l'équation différentielle d'inconnue y, fonction dérivable sur $[0, +\infty[$:

$$(E) \qquad y' + 2xy = 2x\,.$$

1. Démontrer que l'équation differentielle (E) possède une unique solution constante sur $[0, +\infty[$ et la déterminer.

2. Déterminer les fonctions dérivables sur $[0, +\infty[$ qui vérifient l'équation différentielle :

$$y' + 2x\,y = 0\,.$$

3. Déterminer la fonction Φ solution de l'équation différentielle (E), qui vérifie la condition initiale $\Phi\,(0) = 0$.

Partie C. Étude d'une variable aléatoire continue.

1. Démontrer que la fonction f définie dans la Partie A, peut être la densité de probabilité d'une variable aléatoire continue.

2. Soit X une variable aléatoire continue admettant pour densité de probabilité la fonction f.

   (a) Démontrer que la fonction de répartition F de X est définie par :

$$F\,(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 - \mathrm{e}^{-x^2} & \text{si } x \geqslant 0\,. \end{cases}$$

   (b) Déterminer le réel m tel que $P\,(X < m) = 0,5$.

3. La durée de fonctionnement sans panne d'une machine est modélisée par une variable aléatoire continue X admettant une densité de probabilité. On appelle taux de panne à l'instant $t > 0$ de cette machine le nombre $\tau_X(t)$ défini par :

$$\tau_X(t) = \lim_{h \overset{>}{\to} 0} \frac{1}{h} \cdot P_{(X>t)}(t < X < t+h)$$

où $P_A(B)$ désigne la probabilité de l'événement A sous l'hypothèse que l'événement B est réalisé.

(a) Déterminer pour $t > 0$ le taux de panne d'une machine dont la durée de fonctionnement sans panne est la variable aléatoire continue X définie à la question 2.

(b) Démontrer que si le taux de panne d'une machine à l'instant t est $2t$ alors sa durée de fonctionnement sans panne admet F comme fonction de répartition.

Exercice 3 :

Le but du problème est d'étudier un exemple de modèle d'urnes, utilisé en dynamique des populations pour modéliser la dérive génétique (modèle de WRIGHT-FISHER).

Dans tout l'exercice, on note $\mathcal{B}(n, p)$ la loi binomiale de paramètres n et p où n désigne un entier naturel et p un réel de $[0; 1]$. Dans une urne U_0 il y a 1 boule noire et 2 boules blanches.

On procède à trois tirages successifs avec remise et on note X_1 la variable aléatoire égale au nombre de boules noires obtenues.

1. Justifier que $P(X_1 = 2) = 2\left(\frac{1}{3}\right)^2$.

2. Expliquer pourquoi la variable aléatoire X_1 suit la loi $\mathcal{B}\left(3, \frac{1}{3}\right)$.

3. On place dans une urne U_1, trois boules dont X_1 boules noires et les autres blanches. On procède à trois tirages avec remise et on note X_2 le nombre de boules noires obtenues.

   (a) Sous l'hypothèse que $X_1 = 0$, justifier que $P(X_2 = 0) = 1$ et que $P(X_2 = k) = 0$ pour tout $k \in \{1, 2, 3\}$.

(b) Déterminer de même $P(X_2 = k)$, pour tout $k \in \{0, 1, 2, 3\}$, sous l'hypothèse $X_1 = 3$.

(c) Sous l'hypothèse que $X_1 = 2$, déterminer la loi que suit la variable aléatoire X_2.

(d) En déduire, pour tout $k \in \{0, 1, 2, 3\}$, que sous l'hypothèse que $X_1 = k$, X_2 suit la loi $\mathcal{B}\left(3, \frac{k}{3}\right)$.

4. On recommence le même procédé. Ainsi, à la $n - ième$ étape, $n \geqslant 1$, on procède à trois tirages avec remise dans une urne U_{n-1} contenant X_{n-1} boules noires et $3 - X_{n-1}$ boules blanches et on note X_n le nombre de boules noires obtenues.

(a) Justifier, pour tout $k \in \{0, 1, 2, 3\}$, que sous l'hypothèse que $X_n = k$, $k \in \{0, 1, 2, 3\}$, X_{n+1} suit la loi $\mathcal{B}\left(3, \frac{k}{3}\right)$.

(b) En déduire, à l'aide de la formule des probabilités totales, que

$$P(X_{n+1} = 0) = P(X_n = 0) + \frac{8}{27}P(X_n = 1) + \frac{1}{27}P(X_n = 2)\,.$$

5. Le tableau suivant donne la valeur de $P(X = k)$ pour X suivant la loi $\mathcal{B}\left(3, \frac{k}{3}\right)$ en fonction de k :

k \ X	0	1	2	3
0	1	0	0	0
1	$\frac{8}{27}$	$\frac{12}{27}$	$\frac{6}{27}$	$\frac{1}{27}$
2	$\frac{1}{27}$	$\frac{6}{27}$	$\frac{12}{27}$	$\frac{8}{27}$
3	0	0	0	1

et on note Y_n la matrice colonne $Y_n = \begin{pmatrix} P(X_n = 0) \\ P(X_n = 1) \\ P(X_n = 2) \\ P(X_n = 3) \end{pmatrix}$.

Démontrer que $Y_{n+1} = A \times Y_n$ où $A = \begin{pmatrix} 1 & \frac{8}{27} & \frac{1}{27} & 0 \\ 0 & \frac{12}{27} & \frac{6}{27} & 0 \\ 0 & \frac{6}{27} & \frac{12}{27} & 0 \\ 0 & \frac{1}{27} & \frac{8}{27} & 1 \end{pmatrix}$.

6. Calcul de l'espérance mathématique.

   (a) Vérifier que l'espérance mathématique $E(X_n)$ de la variable aléatoire X_n satisfait la relation : $E(X_n) = V \times Y_n$ où V est la matrice ligne $V = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$.

   (b) Calculer $V \times A$.

   (c) En déduire que la suite $(E(X_n))_{n \geq 1}$ est constante et déterminer sa valeur.

7. On s'intéresse à la suite (u_n) définie par $u_n = P(X_n = 0)$ pour n entier strictement positif.

   (a) Déterminer u_1.

   (b) Exprimer u_{n+1} en fonction de u_n et des probabilités $P(X_n = 1)$ et $P(X_n = 2)$.

   (c) En déduire que la suite (u_n) est croissante.

   (d) Justifier que (u_n) est convergente. On appellera ℓ_0 sa limite.

   On admet que la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ définie par $x_n = P(X_n = 3)$ est convergente et on appellera ℓ_3 sa limite.

8. On note (s_n) et (t_n) les suites définies, pour tout entier n non nul, respectivement par $s_n = v_n + w_n$ et $t_n = v_n - w_n$ où $v_n = P(X_n = 1)$ et $w_n = P(X_n = 2)$.

   (a) Démontrer que la suite (s_n) est géométrique de raison $\frac{2}{3}$.

   (b) Démontrer que la suite (t_n) est géométrique de raison $\frac{2}{9}$.

   (c) En déduire que pour tout entier $n \geqslant 1$, $v_n = \frac{1}{2}\left(\left(\frac{2}{3}\right)^n + \left(\frac{2}{9}\right)^n\right)$ et $w_n = \frac{1}{2}\left(\left(\frac{2}{3}\right)^n - \left(\frac{2}{9}\right)^n\right)$.

   (d) Justifier alors que (v_n) et (w_n) convergent et déterminer leurs limites respectives ℓ_1 et ℓ_2.

9. A l'aide des questions 8 (d) et 6 (c), déterminer ℓ_0 et ℓ_3. Donner une interprétation de ces résultats dans le contexte de l'exercice.

FIN DU SUJET