Pour signaler une erreur dans ce corrigé : forum@bibmath.net

Exercice n° 1 : VRAI - FAUX

1. VRAI. Notons c le côté du carré et R le rayon du disque. Alors on a $p = 4c$ et $p = 2\pi R$. L'aire du disque est donc
$$\text{Aire(disque)} = \pi R^2 = \pi \times \frac{p^2}{4\pi^2} = \frac{p^2}{4\pi}.$$
L'aire du carré est
$$\text{Aire(carré)} = c^2 = \frac{p^2}{16}.$$
Puisque $16 > 4\pi$, l'aire du disque est bien supérieure ou égale à celle du carré. Un peu de culture... Ce problème est une version très simple de l'inégalité isopérimétrique. Celle-ci dit que, à périmètre donné, la courbe "régulière" qui enferme une surface d'aire la plus grande possible est le cercle. En savoir plus...
2. VRAI. Écrivons $z = a + ib$ avec $(a, b) \in \mathbb{R}^2 \backslash \{(0, 1)\}$. Alors
$$\left|\frac{z+i}{z-i}\right|^2 = \frac{|a+i(b+1)|^2}{|a+i(b-1)|^2} = \frac{a^2+(b+1)^2}{a^2+(b-1)^2}.$$
On a donc
$$\begin{aligned}\left|\frac{z+i}{z-i}\right| = 1 &\iff \frac{a^2+(b-1)^2}{a^2+(b+1)^2} = 1\\ &\iff a^2+(b-1)^2 = a^2+(b+1)^2\\ &\iff b^2-2b+1 = b^2+2b+1\\ &\iff b = 0.\end{aligned}$$
On peut aussi donner une preuve géométrique. Notons M le point d'affixe z, A le point d'affixe i et B le point d'affixe $-i$. Alors $|z - i| = |z + i|$ si et seulement si $AM = BM$, donc si et seulement si M est sur la médiatrice de $[AB]$. Et la médiatrice de $[AB]$ est l'axe des réels.
3. FAUX. Il suffit de trouver un contre-exemple. Mais il suffit de choisir pour A la matrice nulle, pour B la matrice I_2 et pour C la matrice $-I_2$. Pour que l'implication soit vraie, il faudrait ajouter que A est inversible.
4. VRAI. On va faire une preuve par récurrence. Pour $n \geq 0$, on note $\mathcal{P}(n)$ la propriété suivante : $0 \leq u_{n+1} \leq u_n$.
Initialisation : On a $u_0 = 0{,}5$ et $u_1 = 0{,}25$, donc $0 \leq u_1 \leq u_0$ et la propriété $\mathcal{P}(0)$ est vraie.
Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $\mathcal{P}(n)$ est vraie, c'est-à-dire $0 \leq u_{n+1} \leq u_n$. Puisque la fonction carré est croissante sur $[0, +\infty[$, on en déduit que $0 \leq u_{n+1}^2 \leq u_n^2$, c'est-à-dire $0 \leq u_{n+2} \leq u_{n+1}$. Ainsi $\mathcal{P}(n + 1)$ est vraie.
Par le principe de récurrence, $\mathcal{P}(n)$ est donc vraie pour tout entier $n \geq 0$. Remarquons qu'il est obligatoire d'inclure $u_n \geq 0$ dans l'hypothèse de récurrence (ou au moins de le signaler à un moment) pour pouvoir utiliser la croissance de la fonction carré sur $[0, +\infty[$.

5. FAUX. Une des façons de démontrer cela est de se souvenir qu'une primitive de ln est la fonction $t \mapsto t\ln(t) - t$. Ainsi, pour $a \in]0,1]$,

$$f(a) = [t\ln(t) - t]_a^1 = -1 - a\ln(a) + a.$$

Puisque par croissance comparée, $x \ln x \to 0$ si $x \to 0$, on en déduit que $\lim_{a\to 0^+} f(a) = -1$. On pouvait aussi utiliser les résultats bien connus sur les intégrales impropres et remarquer que $\ln(t) = o(1/\sqrt{t})$ en 0. Puisque l'intégrale $\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{t}}$ est convergente, il en est de même de $\int_0^1 \ln(t)dt$, ce qui signifie exactement que f admet une limite (finie) en 0.

6. FAUX. On peut par exemple choisir $u_n = (-1)^n/n$ de sorte que $1/u_{2n}$ tend vers $+\infty$ et $1/u_{2n+1}$ tend vers $-\infty$.

7. VRAI. La fonction sinus hyperbolique est continue sur $\mathbb{R}$. De plus, elle admet pour limite $-\infty$ en $-\infty$ et $+\infty$ en $+\infty$. Par le théorème des valeurs intermédiaires, tout réel admet un antécédent par sinh. On aurait pu être plus précis sur les propriétés de sinh, même si c'est inutile pour répondre à la question. En effet, la dérivée du sinus hyperbolique est la fonction cosinus hyperbolique, donnée par

$$\cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} > 0.$$

Ainsi, la fonction sinus hyperbolique est strictement croissante. En ajoutant les propriétés de continuité et de limites aux bornes, on sait qu'elle réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$.

8. FAUX. La boucle calcule les sommes partielles de la série de terme générale $\frac{6}{n^2}$. Puisque cette série est convergente, elle est bornée et il existe un réel $a > 1$ tel que, pour tout $n \geq 1$, $S_n < a$, où (S_n) est la suite des sommes partielles de cette série. Pour cette valeur de a, l'éxécution de `seuil(a)` ne s'arrêtera jamais.

9. VRAI. On a

$$P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}.$$

Or

$$\begin{aligned} P(B) &= P(B|\bar{A})P(\bar{A}) + P(B|A)P(A) \\ &= (1 - P(\bar{B}|\bar{A}))(1 - P(A)) + 0{,}3 \times 0{,}6 \\ &= 0{,}1 \times 0{,}4 + 0{,}3 \times 0{,}6 \\ &= 0{,}22. \end{aligned}$$

D'autre part,

$$P(A \cap B) = P(B|A)P(A) = 0{,}18.$$

On en déduit que

$$P_B(A) = \frac{0{,}18}{0{,}22} = \frac{9}{11}.$$

10. VRAI. On commence par rappeler le résultat suivant : si D_1 et D_2 sont deux droites de l'espace non parallèles, alors il existe une unique droite D perpendiculaire à D_1 et à D_2. Ici, un vecteur directeur de (OA) est $\vec{w}(0,0,2)$; il est bien orthogonal à $\vec{u}$ et à $\vec{v}$ (faire le produit scalaire). De plus, (OA) coupe $(O,\vec{u})$ en O et $(A,\vec{v})$ en A. Comme $(O,\vec{u})$ et $(A,\vec{v})$ ne sont pas parallèles (les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires), la droite (OA) est bien l'unique droite de l'espace perpendiculaire à la fois aux droites $(O,\vec{u})$ et $(A,\vec{v})$.

Exercice n° 2

A. Étude d'une fonction

1. **(a)** La fonction f est continue en 0 si et seulement si elle admet une limite à droite et une limite à gauche en 0 et si ces limites coïncident. Or, il est clair (il n'y a pas de forme indéterminée et $\lim_{x\to 0} e^{-x^2} = 1$) que

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^-} f(x) = 0.$$

Ainsi, f est continue en 0. Pour déterminer si f est dérivable en 0, on va étudier si le taux d'accroissement de f admet une limite en 0. Pour $x < 0$, on a

$$\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = 0 \to 0 \text{ si } x \to 0^-.$$

Pour $x > 0$, on a

$$\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = 2e^{-x^2} \to 2 \text{ si } x \to 0^+.$$

Ainsi, le taux d'accroissement en 0 admet des limites à gauche et des limites à droite qui ne coïncident pas, donc f n'est pas dérivable en 0.

(b) f est dérivable sur $]0, +\infty[$ et sa dérivée vérifie, pour tout $x > 0$,

$$f'(x) = (2-4x^2)e^{-x^2} = 2(1-2x^2)e^{-x^2} = 2(1-\sqrt{2}x)(1+\sqrt{2}x)e^{-x^2}.$$

Ainsi, $f'(x) \leq 0$ si $1-\sqrt{2}x \leq 0$ c'est-à-dire si $x \geq \sqrt{2}/2$ et $f'(x) \geq 0$ si $0 < x \leq \sqrt{2}/2$: la fonction f est croissante sur $]0, \sqrt{2}/2[$ et décroissante sur $]\sqrt{2}/2, +\infty[$. De plus, en posant $u = x^2$, on a

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{u\to+\infty} 2\sqrt{u}e^{-u} = 0$$

par croissance comparée de l'exponentielle et des puissances. On obtient le tableau de variations suivant :

x	0	$\sqrt{2}/2$	$+\infty$
f	0 $\nearrow$	$\sqrt{2}e^{-1/2}$	$\searrow$ 0

(c) Rappelons que si f est dérivable en x_0, $(x_0, f(x_0))$ est un point d'inflexion pour f si la tangente au point $(x_0, f(x_0))$ traverse la courbe représentative de f en ce point. Si la fonction f est deux fois dérivable, et si $(x_0, f(x_0))$ est un point d'inflexion de f, alors $f''(x_0) = 0$. Réciproquement, si f'' s'annule en changeant de signe en x_0, alors $(x_0, f(x_0))$ est un point d'infexion de f. On est donc amené à étudier f''. Pour $x > 0$, on a

$$f''(x) = (-12x + 8x^3)e^{-x^2}$$

qui est du signe de

$$P(x) = -12x + 8x^3.$$

On factorise ce polynôme :

$$P(x) = 8x\left(x^2 - \frac{3}{2}\right) = 8x\left(x - \sqrt{\frac{3}{2}}\right)\left(x + \sqrt{\frac{3}{2}}\right).$$

Ainsi, P (donc f'') s'annule uniquement en $\sqrt{\frac{3}{2}}$ sur $]0,+\infty[$ et en plus f'' change de signe en ce point. La courbe représentative de f admet un unique point d'inflexion sur $]0,+\infty[$: le point de coordonnées $\left(\sqrt{\frac{3}{2}}, \sqrt{6}e^{-3/2}\right)$.

2. **(a)** f est de la forme $-u'\exp(u)$ avec $u(x) = -x^2$. On a donc, pour tout $x > 0$,

$$F(x) = \left[-\exp(-t^2)\right]_0^x = 1 - \exp(-x^2).$$

(b) Puisque $\lim_{x\to+\infty}(-x^2) = -\infty$ et que $\lim_{u\to-\infty}\exp(u) = 0$, on trouve par composition que $\lim_{x\to+\infty} F(x) = 1$.

3. La courbe de f est C_1, celle de f' est C_0, celle de f'' est C_3, celle de F est C_2.

B. Une équation différentielle

1. Soit $y(x) = c$ une fonction constante solution de l'équation différentielle. Alors on doit avoir pour tout $x \geq 0$, $2cx = 2x$ et donc en prenant $x = 1$ on obtient $c = 1$. Réciproquement, la fonction constante égale à 1 est solution de l'équation différentielle.

2. On sait que l'ensemble des solutions d'une équation différentielle homogène du premier ordre est un espace vectoriel de dimension 1. Ici, il est facile de vérifier que la fonction $y(x) = \exp(-x^2)$ est solution de l'équation différentielle. Donc toutes les solutions sont les fonctions de la forme $y(x) = C\exp(-x^2)$, avec $C \in \mathbb{R}$. Si on a oublié le théorème de structure, une autre façon de procéder est de considérer y une solution de l'équation différentielle, et de poser

$$z(x) = \frac{y(x)}{e^{-x^2}} = y(x)e^{x^2}.$$

Alors z est dérivable sur $[0,+\infty[$ et pour tout $x > 0$, on a

$$z'(x) = y'(x)e^{x^2} + 2xy(x)e^{x^2} = (y'(x) + 2xy(x))e^{x^2} = 0.$$

Ainsi, z est constante et on retrouve le résultat précédent (modulo le fait de vérifier que les fonctions Ce^{-x^2} sont bien solutions de l'équation différentielle).

3. Les solutions de (E) sont somme d'une solution particulière et des solutions de l'équation homogène. Ainsi, les solutions de (E) sont les fonctions de la forme $y(x) = 1 + Ce^{-x^2}$, avec $C \in \mathbb{R}$. La condition $y(0) = 0$ se traduit par $1 + C = 0$, soit $C = -1$. La fonction ϕ solution de l'équation différentielle (E) et vérifiant $\phi(0) = 0$ est donc la fonction $\phi(x) = 1 - e^{-x^2}$.

C. Étude d'une variable aléatoire continue

1. La fonction f est continue et positive ou nulle sur $\mathbb{R}$. De plus,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt = \int_0^{+\infty} f(t)dt = \lim_{x\to+\infty}\int_0^x f(t)dt = F(x) = 1.$$

Ainsi, f est bien la densité de probabilité d'une variable aléatoire continue.

2. **(a)** Tout a déjà été presque fait dans la partie A. En effet, on a

$$F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^x f(t)dt.$$

Si $x < 0$, alors $F(x) = 0$ puisque f est identiquement nulle sur $]-\infty, 0]$. Si $x \geq 0$, alors $F(x)$ a été déterminé en A.2.(a).

(b) On cherche m tel que $F(m) = 1/2$. Remarquons que l'on peut se restreindre à chercher $m > 0$. On doit donc résoudre

$$1 - e^{-m^2} = \frac{1}{2} \iff e^{-m^2} = \frac{1}{2} \iff m^2 = \ln(2) \iff m = \sqrt{\ln 2}.$$

La dernière équivalence vient du fait que $m > 0$.

3. Signalons qu'il y avait une erreur dans l'énoncé de cette question : $P_A(B)$ désigne la probabilité de l'événement B sous l'hypothèse que l'événement A est réalisé.

(a) On commence par faire un calcul général pour une variable aléatoire continue X admettant une densité f_X et une fonction de répartition F_X, calcul qui sera aussi utile dans la question suivante. Soit $t > 0$ et $h > 0$. Alors

$$\begin{aligned} P_{(X>t)}(t < X < t+h) &= \frac{P\big((t < X < t+h) \cap (X > t)\big)}{P(X > t)} \\ &= \frac{P(t < X < t+h))}{P(X > t)} \\ &= \frac{F_X(t+h) - F_X(t)}{1 - F_X(t)} \end{aligned}$$

(la dernière égalité vient du fait que X est une variable aléatoire continue et donc du fait que $P(X = a) = 0$ pour tout $a \in \mathbb{R}$). On fait tendre h vers 0, et on obtient

$$\tau_X(t) = \lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \cdot P_{(X>t)}(t < X < t+h) = \frac{F_X'(t)}{1 - F_X(t)} = \frac{f_X(t)}{1 - F_X(t)}.$$

Si maintenant $F_X = F$ et $f_X = f$, alors

$$\tau_X(t) = \frac{2te^{-t^2}}{e^{-t^2}} = 2t.$$

(b) On étudie maintenant la réciproque. Si X est la variable aléatoire modélisant la durée de fonctionnement, et si F_X est sa fonction de répartition, alors d'après le calcul réalisé ci-dessus, on a pour tout $t > 0$,

$$\frac{F_X'(t)}{1 - F_X(t)} = 2t \iff F_X'(t) + 2tF_X(t) = 2t.$$

Ainsi, F_X est solution de (E) et en plus, on sait que $F_X(0) = 0$ puisque X est à valeurs positives. Ainsi, par les résultats de la partie B., $F_X = F$.

Exercice n° 3

1.

2. X_1 compte le nombre de succès (obtenir une boule noire) dans la succession de 3 épreuves de Bernoulli indépendantes (car il y a remise) avec probabilité $1/3$ de succès. Ainsi, X_1 suit la loi $\mathcal{B}(3, 1/3)$ ce qui entraîne immédiatement le résultat de la question 1. également.

3. **(a)** Sous l'hypothèse $X_1 = 0$, l'événement $X_2 = 0$ est l'événement certain et l'événement $X_2 = k$, avec $k \in \{1, 2, 3\}$ est l'événement impossible. Donc $P_{X_1=0}(X_2 = 0) = 1$ et $P_{X_1=0}(X_2 = k) = 0$ pour $k \in \{1, 2, 3\}$.

(b) On a $P_{X_1=3}(X_2 = k) = 0$ si $k \in \{0, 1, 2\}$ et $P_{X_1=3}(X_2 = 3) = 1$.

(c) Sous l'hypothèse $X_1 = 2$, X_2 compte le nombre de succès (obtenir une boule noire) dans la succession de 3 épreuves de Bernoulli indépendantes (car il y a remise) avec probabilité $1/3$ de succès. Ainsi, X_2 suit la loi $\mathcal{B}(3, 2/3)$.

(d) Sous l'hypothèse $X_1 = 1$, X_2 suit la loi $\mathcal{B}(3, 1/3)$. Ainsi, en résumant tous les cas précédents, sous l'hypothèse $X_1 = k$, X_2 suit la loi $\mathcal{B}(3, k/3)$.

4. **(a)** Il suffit de reprendre exactement le calcul des 4 questions précédentes.

(b) Les événements $X_n = 0$, $X_n = 1$, $X_n = 2$ et $X_n = 3$ forment une partition de l'univers. On admet qu'ils sont de probabilité non nulle pour pouvoir appliquer la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned}
P(X_{n+1} = 0) &= P_{X_n=0}(X_{n+1} = 0)P(X_n = 0) + P_{X_n=1}(X_{n+1} = 0)P(X_n = 1) \\
&\quad + P_{X_n=2}(X_{n+1} = 0)P(X_n = 2) + P_{X_n=3}(X_{n+1} = 0)P(X_n = 3) \\
&= P(X_n = 0) + \binom{0}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^3 P(X_n = 1) + \binom{0}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^3 P(X_n = 2) + 0 \\
&= P(X_n = 0) + \frac{8}{27}P(X_n = 1) + \frac{1}{27}P(X_n = 2).
\end{aligned}$$

5. De la même façon, par la formule des probabilités totales,

$$\begin{aligned}
P(X_{n+1} = k) &= P_{X_n=0}(X_{n+1} = k)P(X_n = 0) + P_{X_n=1}(X_{n+1} = k)P(X_n = 1) \\
&\quad + P_{X_n=2}(X_{n+1} = k)P(X_n = 2) + P_{X_n=3}(X_{n+1} = k)P(X_n = 3)
\end{aligned}$$

Il suffit alors de remplacer les $P_{X_n=j}(X_{n+1} = k)$ par leur valeur donnée dans le tableau de l'énoncé pour conclure.

6. **(a)** On a

$$E(X_n) = \sum_{k=0}^{3} kP(X_n = k) = V \times Y_n.$$

(b) On vérifie facilement que $V \times A = V$.

(c) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$E(X_{n+1}) = V \times Y_{n+1} = V \times A \times Y_n = V \times Y_n = E(X_n).$$

Ainsi, la suite $(E(X_n))$ est constante. De plus, $E(X_1) = 3 \times \frac{1}{3} = 1$ (on a utilisé $E(X) = np$ si X suit la loi $\mathcal{B}(n, p)$).

7. **(a)** D'après le résultat de la question 2., $u_1 = \frac{8}{27}$.

(b) Il s'agit juste de retraduire le résultat de la question 4.b. :

$$u_{n+1} = u_n + \frac{8}{27}P(X_n = 1) + \frac{1}{27}P(X_n = 2).$$

(**c**) Puisque $P(X_n = 1) \geq 0$ et $P(X_n = 2) \geq 0$, on a $u_{n+1} - u_n \geq 0$ pour tout $n \geq 1$ et donc la suite (u_n) est croissante.

(**d**) La suite (u_n) est croissante et majorée par 1 : elle est convergente.

8. (**a**) Soit $n \geq 1$. Traduisons d'abord ce que la relation $Y_{n+1} = AY_n$ signifie sur les suites (v_n) et (w_n) :

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= \frac{12}{27}v_n + \frac{6}{27}w_n \\ w_{n+1} &= \frac{6}{27}v_n + \frac{12}{27}w_n. \end{aligned}$$

On a donc

$$\begin{aligned} s_{n+1} &= v_{n+1} + w_{n+1} \\ &= \frac{12}{27}v_n + \frac{6}{27}w_n + \frac{6}{27}v_n + \frac{12}{27}w_n \\ &= \frac{18}{27}(v_n + w_n) \\ &= \frac{2}{3}s_n. \end{aligned}$$

(**b**) Le raisonnement est complètement similaire et la rédaction est laissée au lecteur.

(**c**) Puisque $s_1 = v_1 + w_1 = \frac{12}{27} + \frac{6}{27} = \frac{2}{3}$ et $t_1 = \frac{12}{27} - \frac{6}{27} = \frac{2}{9}$, on en déduit en utilisant que les suites sont géométriques que pour tout $n \geq 1$, on a

$$s_n = \left(\frac{2}{3}\right)^n \text{ et } t_n = \left(\frac{2}{9}\right)^n.$$

Mais $v_n = \frac{s_n + t_n}{2}$ et $w_n = \frac{s_n - t_n}{2}$. On obtient alors immédiatement le résultat demandé.

(**d**) Les suites $((2/3)^n)$ et $((2/9)^n)$ sont des suites géométriques dont la raison est strictement comprise entre 0 et 1 : elles convergent vers 0. Par combinaison linéaire, il en est de même des suites (v_n) et (w_n).

9. Remarquons d'une part que l'on a pour tout entier n,

$$u_n + v_n + w_n + x_n = 1.$$

En passant à la limite on obtient

$$\ell_0 + \ell_3 = 1.$$

D'autre part, on sait que pour tout entier n,

$$0u_n + 1v_n + 2v_n + 3x_n = 1.$$

En passant à la limite, on trouve $3\ell_3 = 1$ et donc $\ell_3 = 1/3$. On en déduit que $\ell_0 = 2/3$. Ainsi, à long terme, il est presque sûr que l'urne ne va contenir que des boules d'une seule couleur. La probabilité que cette couleur soit noire est 1/3.