Liberté • Égalité • Fraternité
RÉPUBLIQUE FRANÇAISE

MINISTÈRE DE L'AGRICULTURE ET DE L'ALIMENTATION

CONCOURS D'ACCÈS AU CORPS DES PROFESSEURS CERTIFIÉS DE L'ENSEIGNEMENT AGRICOLE PUBLIC ET À LA DEUXIÈME CATÉGORIE DES EMPLOIS DE PROFESSEUR DES ÉTABLISSEMENTS D'ENSEIGNEMENT AGRICOLE PRIVÉ

Concours : **EXTERNE**

Section : **MATHÉMATIQUES**

SESSION 2019

ÉPREUVE ÉCRITE D'ADMISSIBILITÉ N°2

Étude de thèmes

(Coefficient : 2 – Durée : 5 heures)

Matériel(s) et documents(s) autorisé(s) : calculatrice de poche

Ce sujet comporte six pages y compris celle-ci.

SUJET :

La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements interviendront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

L'usage des calculatrices de poche est autorisé, à condition qu'elles soient à fonctionnement autonome et qu'il ne soit pas fait usage d'imprimante.

Le sujet est constitué de deux thèmes.

Thème : configurations du plan

La trigonométrie s'est développée dans l'antiquité pour résoudre des problèmes de navigation ou d'astronomie. Hipparque de Nicée ($-180/-125$) est considéré comme le premier à avoir agrégé les longueurs des cordes dans des tables.

Plus tard, pour faciliter les mesures d'observation et les calculs astronomiques, on doit à Abu-l-Wafa (astronome et mathématicien persan 940-997) les notions de sécante et cosécante, ainsi que les premières formules et tables de trigonométrie sphérique indispensables aux calculs en astronomie.

On appelle « sécante » d'un angle $\widehat{A}$ dont le cosinus est non nul le réel noté $\sec\left(\widehat{A}\right)$ défini par $\sec\left(\widehat{A}\right) = \dfrac{1}{\cos\left(\widehat{A}\right)}$.

On appelle « cosécante » d'un angle $\widehat{A}$ dont le sinus est non nul le réel noté $\operatorname{cosec}\left(\widehat{A}\right)$ défini par $\operatorname{cosec}\left(\widehat{A}\right) = \dfrac{1}{\sin\left(\widehat{A}\right)}$.

Partie A - Détermination de la distance Terre-Lune

En 1751, une expérience a été menée depuis Berlin par Joseph Jérôme Lefrançois de Lalande et depuis Le Cap en Afrique du Sud par Nicolas Louis de Lacaille afin d'améliorer la précision de la détermination de la distance Terre-Lune par la méthode des parallaxes. (cf figure 1)
Joseph Jérôme Lefrançois de Lalande a mesuré l'angle $\widehat{b}$ et Nicolas Louis de Lacaille l'angle $\widehat{c}$ au même instant.

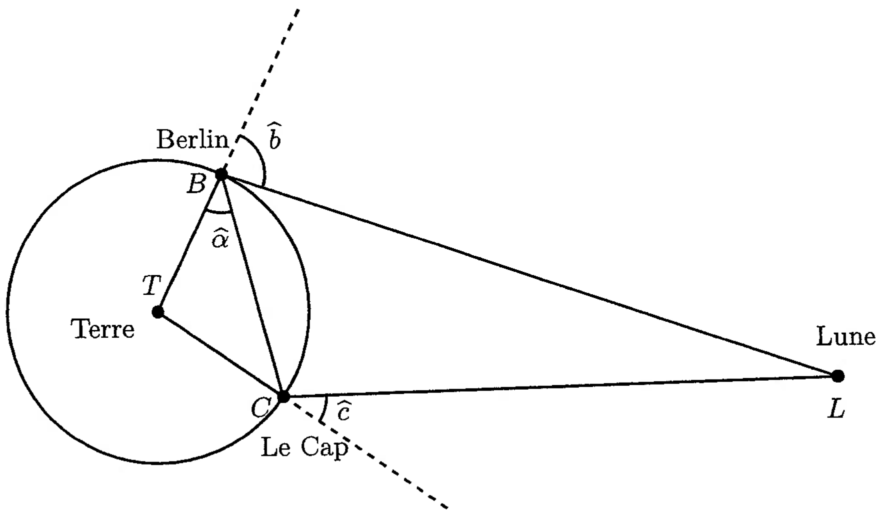

FIGURE 1 – Expérience de Lefrançois et Lacaille.
La figure n'est pas à l'échelle.

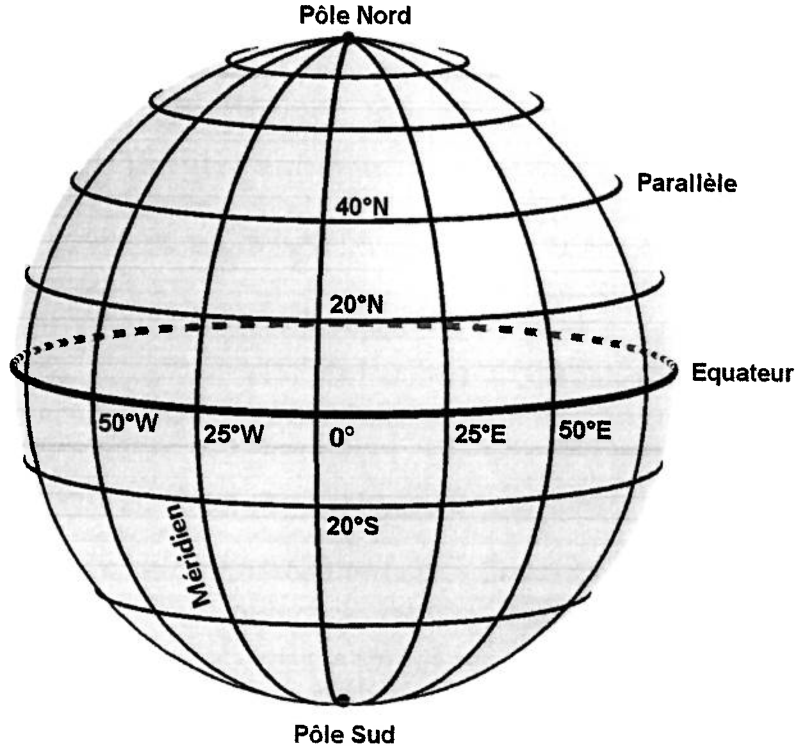

FIGURE 2 – Se repérer sur la Terre.

1. On admet que les villes de Berlin et Le Cap sont situées sur le même méridien. La latitude de Berlin est de 52°31′12″N et celle de la ville du Cap 34°21′25″S.
   En vous appuyant sur la figure 2, construire un schéma en coupe de la Terre où seront positionnés le centre de la Terre, les pôles Nord et Sud, et les villes de Berlin et Le Cap en respectant les latitudes.
2. Expliquer comment convertir en « degré décimal » une mesure d'angle exprimée en « degré, minute, seconde ».
3. On note B le point représentant Berlin, C le point représentant Le Cap, T le point représentant le centre de la Terre et L le point représentant le centre de la Lune.
   On admet que la Terre est une sphère de rayon 6370 km.
   a) Montrer que $86,877°$ est une valeur approchée à 10^{-3} près d'une mesure de l'angle $\widehat{BTC}$.
   b) Calculer BC.
4. Joseph Jérôme Lefrançois de Lalande trouva $53,52°$ comme mesure de l'angle $\widehat{b}$ et Nicolas Louis de Lacaille trouva $34,66°$ comme mesure de l'angle $\widehat{c}$.
   a) Dans un triangle IJK on note O le centre du cercle circonscrit, r son rayon.
   Montrer que $\sin(\widehat{I}) = \dfrac{JK}{2r}$.
   On pourra considérer J' le symétrique de J par rapport à O.
   b) En déduire que $\dfrac{JK}{\sin(\widehat{I})} = \dfrac{IK}{\sin(\widehat{J})} = \dfrac{IJ}{\sin(\widehat{K})}$.
   c) Déterminer la distance BL.

Dans les parties B et C, le plan est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ direct. On note $\mathscr{C}$ le cercle trigonométrique.
Soit x un réel, on note M_x le point de $\mathscr{C}$ dont une mesure en radian de l'angle $(\vec{\imath}, \overrightarrow{OM_x})$ est égale à x.
On appelle H_x le projeté orthogonal du point M_x sur la droite $(O, \vec{\imath})$ et K_x le projeté orthogonal du point M_x sur la droite $(O, \vec{\jmath})$. On note $(\mathcal{T}_x)$ la tangente au cercle trigonométrique au point M_x.

Partie B - Définition de quelques fonctions trigonométriques

1. Construire $M_{\frac{\pi}{6}}$, $M_{\frac{2\pi}{3}}$, $M_{\frac{5\pi}{4}}$ et $M_{-\frac{\pi}{2}}$, ainsi que $\mathcal{T}_{\frac{\pi}{6}}$, $\mathcal{T}_{\frac{2\pi}{3}}$, $\mathcal{T}_{\frac{5\pi}{4}}$ et $\mathcal{T}_{-\frac{\pi}{2}}$.
   On choisira 5cm comme unité de longueur.
2. Quel est le lien entre le point M_x et les réels $\cos(x)$ et $\sin(x)$?
3. Donner une démonstration de l'identité $\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$.
4. Expliciter selon les valeurs du réel x la position relative des droites $(\mathcal{T}_x)$ et $(O, \vec{\imath})$, puis celle des droites $(\mathcal{T}_x)$ et $(O, \vec{\jmath})$.

   Lorsque ceux-ci existent, on note respectivement L_x et N_x les points définis par

$$(\mathcal{T}_x) \cap (O, \vec{\imath}) = \{L_x\} \text{ et } (\mathcal{T}_x) \cap (O, \vec{\jmath}) = \{N_x\}$$

5. Déterminer l'ensemble des réels x tel que L_x existe, puis l'ensemble des réels x tel que N_x existe. On note respectivement $\mathscr{L}$ et $\mathscr{N}$ ces deux ensembles.
6. Démontrer que pour tout $x \in \mathscr{N}$ on a $OM_x^2 = \overline{OK_x} \times \overline{ON_x}$ où $\overline{OK_x}$ et $\overline{ON_x}$ désignent respectivement les réels définis par $\overrightarrow{ON_x} = \overline{ON_x}\,\vec{\jmath}$ et $\overrightarrow{OK_x} = \overline{OK_x}\,\vec{\jmath}$.
7. En déduire $\operatorname{cosec}(x)$ puis $\sec(x)$ en fonction de $\overline{ON_x}$ et $\overline{OL_x}$.
8. Dans cette question on suppose que $x \in \mathscr{L} \cap \mathscr{N}$. Exprimer la longueur L_xN_x en fonction de x.

Partie C - Détermination de quelques identités trigonométriques

On considère un réel x appartenant à l'intervalle $\left]0, \dfrac{\pi}{2}\right[$.
On rappelle que M_0 a pour coordonnées $(1, 0)$ et $(\mathcal{T}_0)$ est la tangente en M_0 au cercle $\mathscr{C}$.
On note R_x le point d'intersection des droites $(\mathcal{T}_0)$ et (OM_x).
Comme dans la partie B, lorsque ceux-ci existent, on note respectivement L_x et N_x les points définis par

$$(\mathcal{T}_x) \cap (O, \vec{\imath}) = \{L_x\} \text{ et } (\mathcal{T}_x) \cap (O, \vec{\jmath}) = \{N_x\}$$

1. a) En considérant le triangle OM_0M_x, exprimer la longueur M_0M_x en fonction de $\sin\left(\dfrac{x}{2}\right)$.
   b) Déterminer les mesures des angles du triangle $M_0H_xM_x$.
   c) En déduire que $\sin(x) = 2\sin\left(\dfrac{x}{2}\right)\cos\left(\dfrac{x}{2}\right)$ et que $2\sin^2\left(\dfrac{x}{2}\right) = 1 - \cos(x)$.
2. a) Démontrer que $M_0R_x = \tan(x)$.
   b) Montrer que les triangles OL_xM_x et OM_0R_x sont isométriques.
   c) Donner une démonstration géométrique de l'égalité $\sec^2(x) = 1 + \tan^2(x)$.

Thème : phénomènes continus

Les fonctions trigonométriques permettent de modéliser des phénomènes continus et périodiques comme par exemple le pendule oscillant, les ondes progressives périodiques ou encore le courant alternatif.

Partie A - Deux exemples de phénomènes continus périodiques

1. En physique, le pendule simple est une masse ponctuelle fixée à l'extrémité d'un fil sans masse, inextensible et oscillant sous l'effet de la pesanteur. On repère la position du pendule simple par l'angle θ qu'il fait avec la verticale. θ est donc une fonction du temps qui, pour de petites oscillations, vérifie l'équation différentielle (E) : $\theta'' + w_0^2\theta = 0$ où w_0 est une constante strictement positive dépendant de la gravité et de la longueur du fil du pendule.
   - **a)** Montrer que les fonctions de la forme $t \mapsto A\cos(w_0t) + B\sin(w_0t)$, où A et B sont des réels, sont des solutions définies sur $\mathbb{R}$ de l'équation (E) .
   - **b)** Expliquer comment écrire l'expression $A\cos(w_0t) + B\sin(w_0t)$ sous la forme $K\sin(w_0t + \phi)$ où K et ϕ désignent des nombres réels.
   - **c)** On note, dans un repère orthogonal du plan, $\mathscr{C}_{w_0,\phi}$ la représentation graphique de la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $t \mapsto K\sin(w_0t + \phi)$ où K et ϕ désignent des nombres réels.
     Expliquer comment se modifie la courbe $\mathscr{C}_{w_0,\phi}$ lorsque w_0 et ϕ varient.
2. Soit α un réel. Les solutions de l'équation différentielle de Bessel (B_α) : $x^2y'' + xy' + (x^2 - \alpha^2)y = 0$ interviennent dans beaucoup de problèmes physiques. Elles ont été développées dans le cadre des études du mouvement des planètes induit par l'interaction gravitationnelle.
   - **a)** Montrer que la fonction $x \mapsto \dfrac{\sin(x)}{\sqrt{x}}$ est solution de $(B_{\frac{1}{2}})$ sur $]0, +\infty[$.
   - **b)** Déterminer $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin(x)}{\sqrt{x}}$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\sin(x)}{\sqrt{x}}$.
     Donner une interprétation pour chacune de ces limites.

Soit x un réel. On rappelle que la cosécante de x est, lorsqu'il existe, le réel défini par $\operatorname{cosec}(x) = \dfrac{1}{\sin(x)}$.

Partie B - Étude de la fonction cosec

1. Proposer un plan détaillé de l'étude de la fonction cosec et le mettre en œuvre afin d'obtenir la courbe représentative.
   On pourra s'appuyer sur les éléments de symétrie et la périodicité pour réduire l'ensemble d'étude.
2. **a)** Rédiger un énoncé d'exercice comportant au maximum trois questions, destiné à une classe de seconde générale et technologique, portant sur la partie « fonctions » et s'appuyant sur le graphique de la fonction cosec sur l'intervalle $]0, \pi[$.
   b) Rédiger une correction de l'exercice proposé à la question précédente qui serait destinée à être distribuée aux élèves de cette classe.
3. **a)** Soit $m \in \mathbb{R}$.
   Donner le nombre de solutions de l'équation $\operatorname{cosec}(x) = m$ d'inconnue x en fonction du réel m. Justifier la réponse.
   b) Donner l'expression exacte des solutions dans le cas $m = 2$.

c) Démontrer que l'équation $\operatorname{cosec}(x) = 3$ admet une unique solution dans l'intervalle $\left]0, \frac{\pi}{2}\right]$.
On note x_0 cette solution.

d) En se plaçant dans le cadre d'une classe de Terminale S, écrire un algorithme permettant d'obtenir une valeur approchée rationnelle de x_0, à 10^{-2} près, par dichotomie.

C - Primitive de la fonction cosec

1. Justifier que la fonction cosec admet une unique primitive s'annulant en $\frac{\pi}{2}$ sur l'intervalle $]0, \pi[$.
On note F cette fonction définie sur l'intervalle $]0, \pi[$.
On ne cherchera pas à expliciter cette fonction dans cette question.

2. Montrer, sans calculer explicitement la fonction F, que dans un repère orthogonal du plan la courbe représentative de F admet un centre de symétrie.

3. Soit $x \in]0; \pi[$. Simplifier $\frac{\sin x}{1 - \cos x} + \frac{\sin x}{1 + \cos x}$.

4. En déduire une expression de la fonction F primitive de la fonction cosec sur $]0; \pi[$ s'annulant en $\frac{\pi}{2}$.

5. Retrouver par une autre méthode le centre de symétrie obtenu à la question C-2.

D - Fonction réciproque de la fonction cosec

1. Citer une condition suffisante pour qu'une fonction définie sur un intervalle I admette une fonction réciproque.
Cette condition est-elle nécessaire ? Sinon donner un contrexemple.

2. En se plaçant dans le cadre d'une classe de lycée, donner deux fonctions réciproques l'une de l'autre.
On précisera les ensembles de départ et d'arrivée.

3. Montrer que l'on peut définir une fonction réciproque de la fonction cosec sur un intervalle J que l'on précisera et à valeurs dans $\left]0, \frac{\pi}{2}\right]$.
On note g cette fonction.

4. Expliquer comment obtenir la représentation graphique de la fonction g à partir de celle de la fonction cosec dans un repère orthonormal du plan.

5. Soit $y \in J$.

   a) Simplifier $\sin(g(y))$.

   b) En déduire une expression de $g(y)$ utilisant la fonction arcsin.

6. Donner le domaine de dérivabilité de g et calculer g'.
