Liberté • Égalité • Fraternité
RÉPUBLIQUE FRANÇAISE

MINISTÈRE DE L'AGRICULTURE ET DE L'ALIMENTATION

CONCOURS D'ACCÈS AU CORPS DES PROFESSEURS CERTIFIÉS DE L'ENSEIGNEMENT AGRICOLE PUBLIC ET À LA DEUXIÈME CATÉGORIE DES EMPLOIS DE PROFESSEUR DES ÉTABLISSEMENTS D'ENSEIGNEMENT AGRICOLE PRIVÉ

Concours : **EXTERNE**

Section : **MATHÉMATIQUES**

SESSION 2019

ÉPREUVE ÉCRITE D'ADMISSIBILITÉ N°1

Culture Disciplinaire

(Coefficient : 2 – Durée : 5 heures)

Matériel(s) et documents(s) autorisé(s) : calculatrice de poche

Ce sujet comporte six pages y compris celle-ci.

SUJET :

La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements interviendront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

L'usage des calculatrices de poche est autorisé, à condition qu'elles soient à fonctionnement autonome et qu'il ne soit pas fait usage d'imprimante.

Le sujet est constitué de deux exercices.

Exercice 1

Pour chacune des affirmations suivantes, dire si elle est vraie ou fausse en justifiant soigneusement la réponse.

1. On considère les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définies pour tout entier naturel $n \in \mathbb{N}^*$ par :
$$u_n = \sum_{k=1}^{n} k^3 \text{ et } v_n = \left(\sum_{k=1}^{n} k\right)^2$$
Affirmation : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = v_n$.

2. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle telle que les sous-suites $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{3n})_{n\in\mathbb{N}}$ convergent.
Affirmation : La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente.

3. On considère l'algorithme suivant :

Algorithme	Commentaire
$A \leftarrow -3$	$\leftarrow$ est le symbole pour l'affectation d'une variable.
$N \leftarrow 0$	
Tant que $A \leqslant 1,9$	Boucle « Tant que ».
$\quad N \leftarrow N+1$	
$\quad A \leftarrow \frac{1}{2}A+1$	
Fin Tant que	
Afficher $N+1$	Valeur affichée par l'algorithme.

Affirmation : L'algorithme précédent se termine.

4. Dans l'ensemble des nombres complexes $\mathbb{C}$, on considère l'équation (E) : $z^2 + 2\bar{z} - 1 = 0$ où $\bar{z}$ désigne le conjugué de z.
Affirmation : (E) admet exactement 2 solutions dans $\mathbb{C}$.

5. Soient θ un réel et n un entier naturel. On pose $Z_n = \Big(1 + \cos(\theta) + i\sin(\theta)\Big)^n$.
Affirmation : Z_n est un réel si et seulement si il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $n\theta = 2k\pi$.

6. Soit m un réel. On considère le système (S_m) : $\begin{cases} x+y+z &= 4 \\ x+my+3z &= -1 \\ x+3y+2z &= 1 \end{cases}$
Affirmation : Pour toute valeur de m, (S_m) admet au moins une solution.

7. Dans un repère orthonormé de l'espace, on considère le plan $\mathcal{P}$ d'équation $x - 2y + 2z - 5 = 0$ et la sphère $\mathcal{S}$ d'équation $x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 10y - 2z + 5 = 0$.
Affirmation : L'intersection du plan $\mathcal{P}$ et de la sphère $\mathcal{S}$ est un cercle de rayon 4.

8. Dans une repère orthonormé du plan, on considère les points $A(4,6)$, $B(7,-1)$, $C(14,5)$ et $I(8,3)$.
Affirmation : I est le centre du cercle inscrit dans le triangle ABC.

9. Soit f une fonction définie et dérivable sur $]1; +\infty[$ telle que $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$.
Affirmation : $\lim_{x \to +\infty} f'(x) = 0$ où f' désigne la fonction dérivée de f.

10. Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ telle que pour tout couple de réels (x, y), on a $f(x+y) = f(x) \times f(y)$.
Affirmation : Si f s'annule au moins une fois alors f est la fonction nulle.

11. Soit f une fonction définie et continue sur $[0, 1]$ telle que $\int_0^1 f(x)dx = 2$.
Affirmation : Il existe $x_0 \in [0, 1]$ tel que $f(x_0) = 2$.

12. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on considère les entiers $a_n = n^2 + 1$ et $b_n = n + 2$. On note $D_n = PGCD(a_n, b_n)$.
Affirmation : D_n est égal à 1 ou 5.

Exercice 2

Rappels et notations

Définition
Soit $p \in [0,1]$. On appelle épreuve de Bernoulli de paramètre p, une expérience aléatoire comportant deux issues, le succès et l'échec, de probabilités respectives p et $1-p$.

Résultats admis
Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'événements d'un espace probabilisé muni d'une probabilité P.

1. Si pour tout couple d'entiers $(n,m) \in \mathbb{N}^2$ tel que $n \neq m$ on a $A_n \cap A_m = \varnothing$ alors, par définition d'une probabilité, on a $P\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = \sum_{n\in\mathbb{N}} P(A_n)$.
2. Si pour tout entier naturel $n \in \mathbb{N}$, on a $A_n \subset A_{n+1}$ alors $P\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = \lim_{n\to+\infty} P(A_n)$.
3. Si pour tout entier naturel $n \in \mathbb{N}$, on a $A_{n+1} \subset A_n$ alors $P\left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = \lim_{n\to+\infty} P(A_n)$.

Notations
Soient A et B deux événements tels que $P(B) \neq 0$, $P_B(A)$ désigne la probabilité conditionnelle de l'événement A sachant l'événement B.

Les parties A, B, C et D de cet exercice sont dans une large mesure indépendantes.

Partie A : temps d'attente de la face six

On décide de lancer un dé parfaitement équilibré, dont les faces sont numérotées de 1 à 6, jusqu'à obtenir la face 6.

1. Valider ou réfuter chacune des affirmations suivantes en justifiant la réponse.
   * Il y a plus de chances que l'expérience s'arrête au premier lancer qu'au deuxième.
   * Il y a moins de chances que l'expérience s'arrête au premier lancer qu'après le premier lancer.
   * On est certain que l'expérience va s'arrêter après un nombre fini de lancers.

2. Recopier et compléter l'algorithme ci-dessous affichant le nombre de lancers nécessaire pour obtenir la face 6 dans cette expérience aléatoire.

Algorithme	Commentaire
$A \leftarrow$ AléaEntre(1,6)	$\leftarrow$ est le symbole pour l'affectation d'une variable. AléaEntre(1,6) génère aléatoirement et de façon équiprobable une valeur dans l'ensemble $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.
$I \leftarrow$ ...	La valeur affectée à la variable I est à compléter.
Tant que $A \neq 6$	Boucle « Tant que ».
Partie à compléter	
Fin Tant que	
Partie à compléter	

3. On note X la variable aléatoire égale au rang du lancer ayant permis d'obtenir la face 6.
   a) Déterminer la loi de la variable aléatoire X.
   b) On admet que l'espérance de X existe. Montrer que celle-ci est strictement supérieure à 3.

Partie B : loi géométrique

Soit p un réel de l'intervalle $]0, 1[$. On note Y la variable aléatoire, à valeurs dans $\mathbb{N}^*$, égale au rang du premier succès dans la répétition d'épreuves indépendantes de Bernoulli de paramètre p. On dit que Y suit la loi géométrique de paramètre p.

1. Déterminer la loi de Y.
2. Pour quelles valeurs de p a-t-on :
   a) $P(Y = 1) > P(Y = 2)$?
   b) $P(Y = 1) < P(Y \geqslant 2)$?
3. Soit n un entier naturel supérieur à 1. Montrer que $P(Y \geqslant n) = (1 - p)^{n-1}$.
4. On considère l'événement $(Y = +\infty)$.
   a) Écrire une phrase donnant la signification de l'événement $(Y = +\infty)$.
   b) Déterminer $P(Y = +\infty)$.
5. a) Montrer que

$$\forall (n, m) \in (\mathbb{N}^*)^2, \; P_{(Y>n)}(Y > n + m) = P(Y > m)$$

   b) Deux expérimentateurs simulent chacun sur leur ordinateur la répétition d'épreuves indépendantes de Bernoulli de paramètre p jusqu'à obtenir un succès. L'expérimentateur A a obtenu 10 échecs aux 10 premières épreuves et l'expérimentateur B a obtenu 5 échecs aux 5 premières épreuves.

   Valider ou réfuter chacune des propositions suivantes en justifiant la réponse.
   * L'expérimentateur A a plus de chances d'obtenir un succès à son prochain essai que l'expérimentateur B.

* L'expérimentateur A a plus de chances d'obtenir un succès avant le $20^{\text{ème}}$ essai que l'expérimentateur B.

Partie C : loi discrète sans mémoire

On considère une variable aléatoire Z prenant ses valeurs dans $\mathbb{N}^*$ et telle que :

$$\forall (n,m) \in (\mathbb{N}^*)^2,\ P_{(Z>n)}(Z > n+m) = P(Z > m)$$

On suppose de plus que $P(Z = 1) \in]0,1[$. On pose $p = P(Z = 1)$.

1. Montrer que pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, $P(Z > n+1) = (1-p)P(Z > n)$.

2. Déterminer la nature de la suite $(P(Z > n))_{n\in\mathbb{N}^*}$.

3. En déduire la loi de la variable aléatoire Z.

Partie D : espérance de la loi géométrique

Soit x un réel de l'intervalle $]0,1[$. On note T la variable aléatoire prenant ses valeurs dans $\mathbb{N}^*$ et telle que pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, $P(T = n) = (1-x)x^{n-1}$.
Soient n et m deux entiers supérieurs ou égaux à 1. On note f_n et $g_{n,m}$ les fonctions définies sur $]0;1[$ par $f_n(x) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} kx^{k-1}$ et $g_{n,m}(x) = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{n+m} kx^{k-1}$.

1. Montrer que la fonction définie sur $]0;1[$ par $x \mapsto \dfrac{1-x^{n+1}}{1-x}$ est une primitive de la fonction f_n sur $]0;1[$.

2. En déduire une expression de $f_n(x)$ sans utiliser le signe $\sum$.

3. Soit x un réel de l'intervalle $]0,1[$. On considère un réel α dans l'intervalle $]x,1[$.

a) Montrer qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que pour tout entier naturel k vérifiant $k \geqslant n_0$, on a $(k+1)x^k < \alpha k x^{k-1}$.

b) En déduire que pour tout entier $m \in \mathbb{N}^*$, on a : $0 < g_{n_0,m}(x) < (n_0+1)x^{n_0}\dfrac{1}{1-\alpha}$.

c) Montrer que la suite $(g_{n_0,m}(x))_{m\in\mathbb{N}^*}$ est convergente.

4. On note $E(T)$ l'espérance de la variable aléatoire T.
Montrer que $E(T) = \dfrac{1}{1-x}$.
