3.2 Énoncé de la deuxième épreuve écrite

ÉPREUVE ÉCRITE D'ADMISSIBILITÉ N°2

Étude de thème d'enseignement

Coefficient : 2 – Durée : 5 heures

La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements interviendront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

L'usage des calculatrices de poche est autorisé, à condition qu'elles soient à fonctionnement autonome et qu'il ne soit pas fait usage d'imprimante.

Le sujet est constitué d'un problème portant sur des thèmes abordés dans les référentiels de formation de mathématiques de l'enseignement agricole.

Dans ce problème, sont abordés les thèmes suivants : espaces vectoriels, calcul matriciel, application des nombres complexes en géométrie.

Rappels et notations

- Le plan est muni un repère orthonormé direct $\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$.
- On dit que deux vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont colinéaires s'il existe un réel λ tel que $\overrightarrow{u} = \lambda\overrightarrow{v}$ ou $\overrightarrow{v} = \lambda\overrightarrow{u}$.
- Etant donné deux vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ non colinéaires,
  - on appelle parallélogramme associé au repère $(O, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$, et on note $P(O, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ l'ensemble des points M pour lesquels il existe $(x, y) \in [0, 1]^2$ vérifiant $\overrightarrow{OM} = x\overrightarrow{u} + y\overrightarrow{v}$,
  - on appelle intérieur du parallélogramme $P(O, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ et on note $\overset{\circ}{P}(O, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$, l'ensemble des points M pour lesquels il existe $(x, y) \in]0, 1[^2$ vérifiant $\overrightarrow{OM} = x\overrightarrow{u} + y\overrightarrow{v}$,
  - on appelle frontière de $P(O, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ et on note $\delta P(O, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ l'ensemble $P(O, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) \setminus \overset{\circ}{P}(O, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$.
- Soient $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs de coordonnées respectives (x, y) et (x', y') dans la base $\left(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$.
  On rappelle que :
  - le produit scalaire de $\overrightarrow{u}$ et de $\overrightarrow{v}$ noté $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v}$ vérifie $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = \|\overrightarrow{u}\| \times \|\overrightarrow{v}\| \times \cos(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) = xx' + yy'$;
  - $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont orthogonaux si et seulement si $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = 0$;
  - le déterminant de $\overrightarrow{u}$ et de $\overrightarrow{v}$ dans la base $\left(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$ noté $\Delta(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ est défini par $\Delta(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) = xy' - x'y$.
- Soit E un sous-ensemble de $\mathbb{R}$, on note $\mathscr{M}_2(E)$ l'ensemble des matrices carrées d'ordre 2 à coefficients dans E.

  On rappelle que $(\mathscr{M}_2(\mathbb{Z}), +)$ et $(\mathscr{M}_2(\mathbb{R}), +)$ sont des groupes commutatifs.
- Soit θ un réel, on note $R(\theta)$ la matrice $\begin{pmatrix} cos(\theta) & -sin(\theta) \\ sin(\theta) & cos(\theta) \end{pmatrix}$ et $S(\theta)$ la matrice $\begin{pmatrix} cos(\theta) & sin(\theta) \\ sin(\theta) & -cos(\theta) \end{pmatrix}$
- Soient $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ une matrice de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ et $\overrightarrow{u}$ un vecteur du plan de coordonnées (x, y) dans la base $\left(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$, on note $M.\overrightarrow{u}$ le vecteur dont les coordonnées sont obtenues par le produit usuel :

$$M \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax + by \\ cx + dy \end{pmatrix}.$$

- Soit $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ une matrice de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$, le déterminant de M noté $Det(M)$ est défini par $Det(M) = ad - bc$.
- Soient M et N deux matrices de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$, on rappelle que $Det(MN) = Det(M) \times Det(N)$.
- Soit $M \in \mathscr{M}_2(E)$ où E est un sous-ensemble de $\mathbb{R}$. On dit que M admet un inverse dans $\mathscr{M}_2(E)$ s'il existe une matrice N de $\mathscr{M}_2(E)$ telle que $MN = NM = I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Partie A : quelques propriétés du déterminant de deux vecteurs

1. Soient $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ trois vecteurs du plan et λ un réel.

a) Montrer que $\Delta\left(\overrightarrow{v}, \overrightarrow{u}\right) = -\Delta\left(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\right)$.

b) Montrer que $\Delta\left(\overrightarrow{u} + \overrightarrow{w}, \overrightarrow{v}\right) = \Delta\left(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\right) + \Delta\left(\overrightarrow{w}, \overrightarrow{v}\right)$.

c) Montrer que $\Delta\left(\lambda\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\right) = \lambda\Delta\left(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\right)$.

d) En déduire sans utiliser les coordonnées des vecteurs que $\Delta\left(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} + \lambda\overrightarrow{w}\right) = \Delta\left(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\right) + \lambda\Delta\left(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{w}\right)$.

e) Montrer que $\Delta\left(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\right) = 0 \iff \overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont colinéaires.

2. On note (x, y) et (x', y') les coordonnées respectives des vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$.
On considère les nombres complexes $z = x + iy$ et $z' = x' + iy'$.

a) Montrer que $\bar{z}z' = \overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} + i\Delta\left(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\right)$.

b) En déduire que $\left|\Delta\left(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\right)\right| \leq \|\overrightarrow{u}\| \times \|\overrightarrow{v}\|$.

c) Montrer que $\left|\Delta\left(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\right)\right| = \|\overrightarrow{u}\| \times \|\overrightarrow{v}\| \iff \overrightarrow{u} \perp \overrightarrow{v}$.

3. On considère la matrice $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.

a) Montrer que $\Delta\left(M.\overrightarrow{u}, M.\overrightarrow{v}\right) = Det(M)\Delta\left(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\right)$.

b) En déduire $\Delta\left(R(\theta).\overrightarrow{u}, R(\theta).\overrightarrow{v}\right)$ et $\Delta\left(S(\theta).\overrightarrow{u}, S(\theta).\overrightarrow{v}\right)$ en fonction de $\Delta\left(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\right)$.

Partie B : solutions d'un système linéaire

Soit $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ une matrice de $\mathscr{M}_2(\mathbb{Z})$.

1. a) Montrer que $Det(M) \in \mathbb{Z}$.

b) Montrer que si M admet un inverse dans $\mathscr{M}_2(\mathbb{Z})$ alors il est unique.

c) Montrer que si M admet un inverse dans $\mathscr{M}_2(\mathbb{Z})$ alors $|Det(M)| = 1$.

d) Calculer $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$.

e) En déduire que si $|Det(M)| = 1$ alors M admet un inverse N dans $\mathscr{M}_2(\mathbb{Z})$ et $N = Det(M)\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$.

2. En se plaçant dans le cadre d'une classe de seconde générale et technologique, présenter une démarche de résolution d'un système linéaire de deux équations à deux inconnues.

3. Pour tout $(\alpha, \beta) \in \mathbb{Z}^2$, on considère le système $\mathcal{S}_{(M,\alpha,\beta)}$ d'inconnue le couple (x, y) de $\mathbb{Z}^2$,

$$\mathcal{S}_{(M,\alpha,\beta)} \left\{ \begin{array}{rcl} ax + by & = & \alpha \\ cx + dy & = & \beta \end{array} \right. \quad \text{où } (a, b, c, d) \in \mathbb{Z}^4 \text{ et } (a, b, c, d) \neq (0, 0, 0, 0).$$

Soit $(\alpha, \beta) \in \mathbb{Z}^2$.

a) Montrer que :

(x, y) est solution du système $\mathcal{S}_{(M,\alpha,\beta)}$ si et seulement si (x, y) vérifie l'égalité $M\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$.

b) Montrer que si (x, y) est solution du système $\mathcal{S}_{(M,\alpha,\beta)}$ alors (x, y) est solution du système

$$\left\{ \begin{array}{rcl} Det(M)x & = & d\alpha - b\beta \\ Det(M)y & = & -c\alpha + a\beta \end{array} \right.$$

c) En déduire que si pour tout $(\alpha, \beta) \in \mathbb{Z}^2$, le système $\mathcal{S}_{(M,\alpha,\beta)}$ admet au moins une solution dans $\mathbb{Z}^2$ alors $Det(M)$ divise a, b, c et d.
On pourra choisir des valeurs adaptées de (α, β).

d) On suppose que $Det(M) \neq 0$.
Montrer que si pour tout $(\alpha, \beta) \in \mathbb{Z}^2$, le système $\mathcal{S}_{(M,\alpha,\beta)}$ admet au moins une solution dans $\mathbb{Z}^2$ alors $|Det(M)| = 1$.

e) On suppose que $Det(M) = 0$.
Montrer qu'il existe $(\alpha, \beta) \in \mathbb{Z}^2$ tel que le système $\mathcal{S}_{(M,\alpha,\beta)}$ n'admette pas de solution dans $\mathbb{Z}^2$.

f) Montrer que, d'après la question **1e**, si $|Det(M)| = 1$ alors pour tout couple (α, β) le système $\mathcal{S}_{(M,\alpha,\beta)}$ admet comme unique solution dans $\mathbb{Z}^2$ le couple (x_0, y_0) vérifiant :

$$x_0 = Det(M) \times Det \begin{pmatrix} \alpha & b \\ \beta & d \end{pmatrix} \text{ et } y_0 = Det(M) \times Det \begin{pmatrix} a & \alpha \\ c & \beta \end{pmatrix}.$$

Partie C : bases du réseau Γ

On note Γ l'ensemble des points de coordonnées (x, y) dans $\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$ où x et y sont des entiers relatifs. On dit que « Γ est un réseau de points ».
On appelle « base du réseau Γ » tout couple de vecteurs $(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$ à coordonnées entières dans la base $\left(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$ et vérifiant la propriété suivante notée $\mathcal{P}$.

$\mathcal{P}$: Pour tout point $M \in \Gamma$, il existe un unique couple $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{Z}^2$ tel que $\overrightarrow{OM} = \lambda_1 \overrightarrow{e_1} + \lambda_2 \overrightarrow{e_2}$.

1. En se plaçant dans le cadre de la classe de seconde générale et technologique, donner une définition des coordonnées d'un point dans un repère du plan.

2. Quelques exemples.

a) Montrer que le couple $\left(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$ forme une base de Γ.

b) Montrer que le couple $\left(\overrightarrow{i}, 2\overrightarrow{j}\right)$ n'est pas une base de Γ.

c) Le couple $\left(\overrightarrow{i} + \overrightarrow{j}, \overrightarrow{i} - \overrightarrow{j}\right)$ forme-t-il une base de Γ ?

3. Soient $\overrightarrow{e_1}$ et $\overrightarrow{e_2}$ deux vecteurs de coordonnées respectives (a_1, b_1) et (a_2, b_2) dans $\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$ avec $(a_1, a_2, b_1, b_2) \in \mathbb{Z}^4$.

a) Montrer que pour tout couple $(\alpha, \beta) \in \mathbb{Z}^2$ le système $\left\{ \begin{array}{rcl} a_1 x + a_2 y & = & \alpha \\ b_1 x + b_2 y & = & \beta \end{array} \right.$ admet une unique solution dans $\mathbb{Z}^2$ si et seulement si $(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$ forme une base de Γ.

b) En déduire que $(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$ forme une base de Γ si et seulement si $|\Delta\left(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}\right)| = 1$.

4. Soient $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ de coordonnées respectives $(5, 2)$, $(2, 1)$ et $(4, 2)$ dans la base $\left(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$.

a) Montrer que $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ forme une base de Γ.

b) Soit M de coordonnées $(3, 2)$ dans le repère $\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$.
Déterminer le couple d'entiers relatifs (a, b) tel que $\overrightarrow{OM} = a\overrightarrow{u} + b\overrightarrow{v}$.

c) Montrer que $\overrightarrow{w}$ ne peut pas être un élément d'une base de Γ.

5. Déterminer toutes les bases orthogonales de Γ.

Partie D : calcul d'aire

L'unité d'aire est égale à l'aire du carré $P(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$.

1. Soient A et B deux points du plan de coordonnées respectives $(x, 0)$ et (x', y') dans $\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$ où x, x', y' sont des réels quelconques.

- **a)** Rappeler les propriétés relatives aux côtés et aux diagonales d'un parallélogramme.
- **b)** Déterminer les coordonnées du point C tel que $OACB$ soit un parallélogramme.
- **c)** Après avoir rappelé la formule du calcul de l'aire d'un parallélogramme, exprimer l'aire de $OACB$ en fonction des coordonnées des points A et B.
- **d)** Exprimer l'aire du quadrilatère $OACB$ en fonction du déterminant $\Delta\left(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}\right)$.

2. On considère la rotation r_θ de centre O et d'angle θ ($\theta \in \mathbb{R}$).
Soit M un point d'affixe z et $M' = r_\theta(\mathrm{M})$. On note z' l'affixe de M'.
Rappeler sans démonstration l'égalité liant z et z'.

3. On considère les points A et B de coordonnées respectives (x, y) et (x', y') dans $\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$où x, y, x', y' sont des réels quelconques. On suppose de plus $A \neq O$ et $B \neq O$ et on note $z = x + iy$ et $z' = x' + iy'$.
On note C le point du plan tel que $OACB$ est un parallélogramme.

- **a)** Montrer qu'il existe θ dans $\mathbb{R}$ tel que $Im(e^{i\theta}z) = 0$.
- **b)** En déduire que l'aire du quadrilatère $OACB$ est égale à $\left|\Delta\left(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}\right)\right|$.
  On pourra faire appel à la partie A.

4. Montrer que $(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$ forme une base de Γ si et seulement si l'aire de $P(O, \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$ est égale à 1.

Partie E : construction de bases du réseau Γ

1. Soit $(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$ une base de Γ.

- **a)** Montrer que $P(O, \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}) \cap \Gamma$ contient exactement 4 points.
- **b)** En déduire que $\overset{\circ}{P}(O, \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}) \cap \Gamma = \varnothing$.

2. On considère deux vecteurs $\overrightarrow{e_1}$ et $\overrightarrow{e_2}$ non colinéaires à coordonnées entières dans la base $\left(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$.
L'implication suivante est-elle vraie ?

$$\overset{\circ}{P}(O, \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}) \cap \Gamma = \varnothing \Longrightarrow (\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}) \text{ forme une base de } \Gamma$$

3. On considère deux vecteurs $\overrightarrow{e_1}$ et $\overrightarrow{e_2}$ non colinéaires à coordonnées entières dans la base $\left(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$.
On note E_1 et E_2 les points du plan définis par $\overrightarrow{OE_1} = \overrightarrow{e_1}$ et $\overrightarrow{OE_2} = \overrightarrow{e_2}$.
Pour tout réel x, on note $[x]$ la partie entière de x. On rappelle que $[x]$ est égal au plus grand entier relatif inférieur ou égal à x.
Soit M un point de Γ.

- **a)** Justifier qu'il existe $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\overrightarrow{OM} = x\overrightarrow{e_1} + y\overrightarrow{e_2}$.

Dans la suite, on note M' le point du plan associé au point M et défini par $\overrightarrow{OM'} = (x - [x])\overrightarrow{e_1} + (y - [y])\overrightarrow{e_2}$.

- **b)** Démontrer les 3 propositions suivantes :
  - $M' \in \Gamma$.
  - $M' \in \overset{\circ}{P}(O, \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}) \cup [OE_1] \cup [OE_2]$.
  - $M' \neq E_1$ et $M' \neq E_2$.

c) Montrer que si $P(O, \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}) \cap \Gamma$ contient exactement 4 points alors $M' = O$.

d) En déduire que si $P(O, \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}) \cap \Gamma$ contient exactement 4 points alors $(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$ est une base de Γ.

4. Ci-dessous est représenté un réseau de points dans le repère orthonormé $\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$.
Recopier le graphique et construire deux points C et D du réseau pour que le quadrilatère $ABCD$ soit un parallélogramme d'aire égale à 1.
Justifier votre réponse.