3. SUJETS

3.1 Énoncé de la première épreuve écrite

ÉPREUVE ÉCRITE D'ADMISSIBILITÉ N°1

Culture disciplinaire

Coefficient : 2 – Durée : 5 heures

La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements interviendront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

L'usage des calculatrices de poche est autorisé, à condition qu'elles soient à fonctionnement autonome et qu'il ne soit pas fait usage d'imprimante.

Le sujet est constitué d'un problème et comporte huit pages.

Rappels et notations

Définition 1

Soient a et b deux nombres réels distincts et $f :]a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue.

Si $\displaystyle\lim_{x\to a^+} \int_x^b f(t)dt$ existe et est finie, on dit que f est intégrable sur $]a, b]$ et

on note $\displaystyle\int_a^b f(t)dt$ cette limite, c'est-à-dire que $\displaystyle\lim_{x\to a^+} \int_x^b f(t)dt = \int_a^b f(t)dt$.

Relation de Chasles

Soit f une fonction continue et intégrable sur $]a, b]$.

Alors pour tout réel $c \in]a, b]$, f est intégrable sur $]a, c]$ et $\displaystyle\int_a^b f(t)dt = \int_a^c f(t)dt + \int_c^b f(t)dt$.

Rappel

Il existe une fonction ε définie dans un voisinage de 0 et vérifiant $\displaystyle\lim_{x\to 0} \varepsilon(x) = 0$ telle que :

$$\ln(1 + x) = x + x\varepsilon(x)$$

Définition 2

Soient (u_n) et (v_n) deux suites réelles.

On suppose qu'il existe un rang à partir duquel la suite (v_n) ne s'annule pas.

On dit que la suite (u_n) est équivalente à la suite (v_n) si $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{u_n}{v_n} = 1$.

On note alors $u_n \sim v_n$.

Rappel et notation

On rappelle que par convention $0! = 1$ et pour tout couple d'entiers naturels (k, n) tel que $0 \leqslant k \leqslant n$, les coefficients binomiaux sont notés $\displaystyle\binom{n}{k}$ et sont définis par $\displaystyle\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$.

Partie A : expression d'une intégrale comme limite d'une suite

On considère une fonction f définie, continue et décroissante sur $]0; 1]$, telle que $f(1) = 0$. On suppose que f est intégrable sur $]0; 1]$.

n désigne un entier naturel supérieur ou égal à 3.

1. Montrer que pour tout réel $x \in]0; 1]$, on a $\displaystyle 0 \leqslant \frac{x}{2}f(x) \leqslant \int_{\frac{x}{2}}^{x} f(t)dt$.

2. En déduire que $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} xf(x) = 0$.

3. Soit k un entier vérifiant $2 \leqslant k \leqslant n - 1$.

Démontrer la double inégalité :

$$\int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} f(x)\,dx \leqslant \frac{1}{n} f\left(\frac{k}{n}\right) \leqslant \int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} f(x)\,dx$$

4. En déduire que :

$$\int_{\frac{2}{n}}^{1} f(x)\,dx \leqslant \frac{1}{n} \times \sum_{k=2}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) \leqslant \int_{\frac{1}{n}}^{\frac{n-1}{n}} f(x)\,dx \leqslant \int_{\frac{1}{n}}^{1} f(x)\,dx$$

5. Montrer que :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \times \sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) = \int_0^1 f(x)\ dx$$

Partie B : encadrement de l'erreur commise

Dans cette partie, f désigne une fonction positive, continue, décroissante, dérivable et intégrable sur $]0,1]$ telle que $f(1) = 0$ et f' est croissante sur $]0;1]$.

1. Soit a un réel quelconque strictement compris entre 0 et 1 et $r = \min\{a, 1-a\}$.

a) Montrer l'inégalité suivante : $0 \leqslant a - r < a < a + r \leqslant 1$.

b) Justifier que la fonction $\phi : x \longmapsto \displaystyle\int_{a-x}^{a+x} f(t)\ dt - 2\,x\,f(a)$ est définie et deux fois dérivable sur l'intervalle $[0, r[$.

c) Montrer que ϕ'' est positive sur l'intervalle $[0, r[$.

d) En déduire que :

$$\forall x \in [0, r[\,,\ 2xf(a) \leqslant \int_{a-x}^{a+x} f(t)\ dt$$

2. Dans cette question, n désigne un entier naturel supérieur ou égal à 2.
Soit k un entier vérifiant $1 \leqslant k \leqslant n-1$.

a) A l'aide de la question **1d**, justifier l'inégalité :

$$\frac{1}{n} f\left(\frac{k}{n}\right) \leqslant \int_{\frac{k-0.5}{n}}^{\frac{k+0.5}{n}} f(x)\ dx$$

b) En déduire que $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2n}} f(x)dx + \int_{1-\frac{1}{2n}}^{1} f(x)dx \leqslant \Delta_n$ où $\Delta_n = \displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)$.

3. Dans cette question, n désigne un entier naturel supérieur ou égal à 2.

a) Soient a et b deux réels tels que $0 < a < b \leqslant 1$.
On considère la fonction g définie sur $[a, b]$ par $g(t) = f(t) - \left(\dfrac{f(b) - f(a)}{b-a}(t-a) + f(a)\right)$.
Montrer qu'il existe $c \in]a, b[,\ g'(c) = 0$.

b) Déterminer le signe de g' puis celui de g sur l'intervalle $[a, b]$.

c) Montrer que $\displaystyle\int_a^b f(t)dt \leqslant \frac{f(a)+f(b)}{2}(b-a)$. On pourra considérer $\displaystyle\int_a^b g(t)dt$.

d) En déduire que pour tout entier k tel que $1 \leqslant k \leqslant n-1$, on a $\displaystyle\int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} f(x)\ dx \leqslant \frac{1}{2n}\left(f\left(\frac{k}{n}\right) + f\left(\frac{k+1}{n}\right)\right)$.

e) Montrer que $\Delta_n \leqslant \displaystyle\int_0^{\frac{1}{n}} f(x)\,dx - \frac{1}{2n} f\left(\frac{1}{n}\right)$.

Partie C : équivalent de $n!$

On considère la fonction f définie sur $]0,1]$ par $f(x) = -\ln(x)$ et on note $\Delta_n = \int\limits_0^1 f(x)\,dx - \frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)$.

1. **a)** Vérifier que f est dérivable, décroissante, de dérivée croissante sur $]0,1]$ et $f(1) = 0$.

b) Montrer que la fonction définie sur $]0,1]$ par $x \longmapsto x - x\ln(x)$ est une primitive de la fonction f sur $]0,1]$.

c) Vérifier que f est intégrable sur $]0,1]$ et montrer que $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx = 1$.

d) En déduire, à l'aide du résultat obtenu à la question **5** de la Partie A, que $\sqrt[n]{n!} \sim \frac{n}{\mathrm{e}}$.

e) On se demande si la question précédente permet d'obtenir un équivalent de $n!$.
En considérant les suites $(u_n)_{n\geqslant 1}$ et $(v_n)_{n\geqslant 1}$ définies pour tout entier n supérieur ou égal à 1 par $u_n = n^2 + n$ et $v_n = n^2$, montrer que l'implication suivante est fausse :

$$u_n \sim v_n \Rightarrow u_n^n \sim v_n^n$$

Que peut-on en conclure ?

2. Dans cette question, n désigne un entier naturel supérieur ou égal à 2.

a) On note $\alpha_n = \displaystyle\int_0^{\frac{1}{n}} f(x)\,dx$, $\beta_n = \displaystyle\int_0^{\frac{1}{2n}} f(x)\,dx$ et $\gamma_n = \displaystyle\int_{1-\frac{1}{2n}}^{1} f(x)\,dx$.
Exprimer en fonction de n les réels α_n, β_n et γ_n.

b) En déduire, à l'aide des questions **2b** et **3e** de la partie B, que :

$$\frac{1}{n} + \frac{\ln 2}{2n} + \left(1 - \frac{1}{2n}\right)\ln\left(1 - \frac{1}{2n}\right) \leqslant \Delta_n - \frac{1}{2n}\ln n \leqslant \frac{1}{n}$$

3. Soit θ la fonction définie sur $[1, +\infty[$ par

$$\theta(x) = \left(x + \frac{1}{2}\right)\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right).$$

a) Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} \theta(x)$.

b) Vérifier que θ est deux fois dérivable sur $[1, +\infty[$ et montrer que :

$$\forall x \in [1, +\infty[,\ \theta'(x) \leqslant 0.$$

c) En déduire que :

$$\forall x \in [1, +\infty[,\ \theta(x) \geqslant 1.$$

4. Soit $(u_n)_{n\geqslant 2}$ la suite définie pour tout entier n supérieur ou égal à 2 par $u_n = n\,\Delta_n - \frac{1}{2}\ln n$.

a) À l'aide de la question **2b**, montrer que la suite $(u_n)_{n\geqslant 2}$ est bornée.
On pourra calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{2n-1}{2}\ln\left(1 - \frac{1}{2n}\right)$.

b) Montrer que pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2, $u_n = n + \ln\left(\frac{(n-1)!}{n^{n-\frac{1}{2}}}\right)$.

c) En déduire que pour tout entier naturel n supérieur à 2, $u_{n+1} - u_n = 1 - \theta(n)$.

d) En déduire que la suite $(u_n)_{n\geqslant 2}$ est convergente.

e) Montrer qu'il existe un réel ℓ appartenant à l'intervalle $\left[\sqrt{2\mathrm{e}}\ ,\ \mathrm{e}\right]$ tel que :

$$n! \sim \frac{n^n}{\mathrm{e}^n} \times \sqrt{n} \times \ell$$

Partie D : problème de scrutin

On considère une élection à laquelle se présentent uniquement deux candidats notés A et B.
Les bulletins sont dépouillés un par un.
On suppose que A est élu avec m voix contre n pour B ($m+n$ suffrages exprimés avec $m > n$). Un dépouillement peut être représenté par un mot de l'alphabet $\{A, B\}$ correspondant à l'ordre dans lequel sont dépouillés les bulletins. Par exemple si A est élu avec 2 voix contre 1 voix pour B, nous avons 3 dépouillements possibles représentés par les mots suivants :

* AAB
* ABA
* BAA

On note $\mathcal{P}$ la propriété :
« le nombre de voix obtenues par A est strictement supérieur au nombre de voix obtenues par B pendant tout le dépouillement ».
On souhaite déterminer le nombre de dépouillements vérifiant $\mathcal{P}$.

1. Dans cette question, on considère qu'il y a eu 5 suffrages exprimés avec 3 voix pour A et 2 pour B.
  a) Déterminer le nombre de dépouillements possibles.
  b) Ecrire les dépouillements vérifiant la propriété $\mathcal{P}$.

2. Dans la suite de cette partie, on suppose que A est élu avec m voix contre n pour B ($m+n$ suffrages exprimés avec $m > n$).
  a) Justifier que le nombre de dépouillements possibles est égal à $\binom{m+n}{m}$.
  b) Déterminer le nombre de dépouillements commençant par un bulletin pour le candidat B.
  c) En déduire que le nombre de dépouillements vérifiant $\mathcal{P}$ est inférieur ou égal à $\binom{m+n-1}{m-1}$.

3. On rapporte le plan à un repère orthogonal $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ et on associe à tout dépouillement une ligne brisée de la façon suivante :

On construit une suite de points $(M_k)_{0 \leq k \leq n+m}$ de coordonnées (k, y_k) où k représente le rang du bulletin dépouillé, $M_0 = O$ et y_k est définie par :

- $y_0 = 0$
- $y_{k+1} = \begin{cases} y_k + 1 \text{ si le } (k+1)\text{-ième bulletin est pour } A \\ y_k - 1 \text{ si le } (k+1)\text{-ième bulletin est pour } B \end{cases}$

Le dépouillement est représenté par la ligne brisée $(M_0, M_1, \cdots, M_{m+n-1}, M_{m+n})$.
On considère un cas particulier avec $m = 3$ et $n = 2$.
Représenter les lignes brisées associées aux dépouillements vérifiant la propriété $\mathcal{P}$.

4. On note :

- $\mathcal{L}$: l'ensemble de toutes les lignes brisées représentant un dépouillement.
- $\mathcal{C}$: l'ensemble de toutes les lignes brisées de $\mathcal{L}$ passant par le point C de coordonnées $(1;1)$.
- $\mathcal{D}$: l'ensemble de toutes les lignes brisées de $\mathcal{L}$ passant par le point D de coordonnées $(1;-1)$.
- $\mathcal{R}$: l'ensemble de toutes les lignes brisées de $\mathcal{L}$ ayant au moins un point d'intersection avec l'axe des abscisses autre que le point O.
- $\mathcal{S}$: l'ensemble de toutes les lignes brisées de $\mathcal{L}$ admettant le point O comme unique point d'intersection avec l'axe des abscisses.

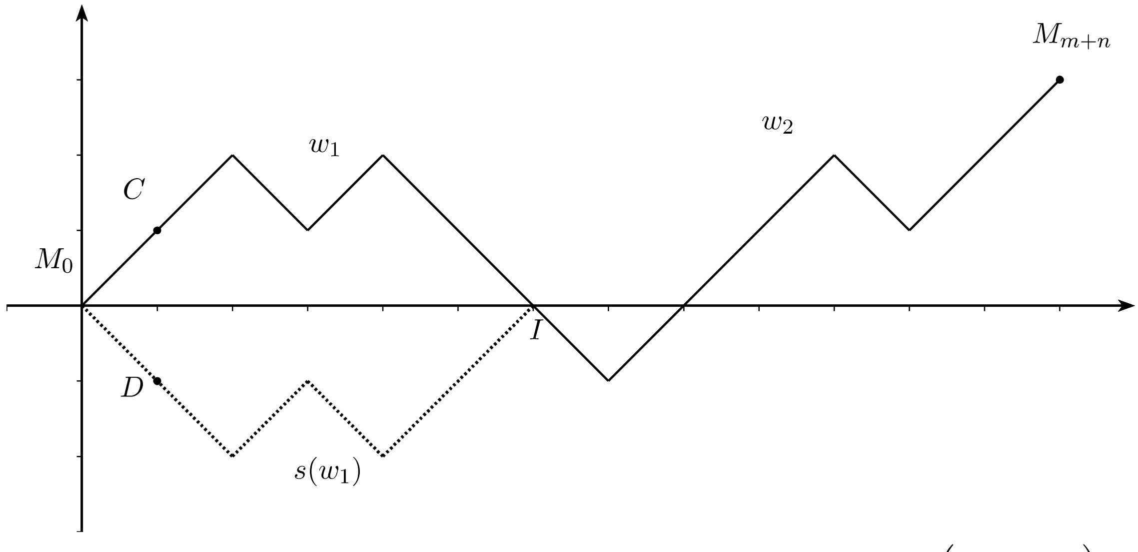
a) Parmi ces ensembles quel est celui correspondant aux dépouillements qui vérifient la propriété $\mathcal{P}$?

b) Déterminer les relations (au sens de l'inclusion) entre :

- $\mathcal{D}$ et $\mathcal{R}$.
- $\mathcal{S}$ et $\mathcal{C}$.

c) Montrer que $\text{card}(\mathcal{S}) + \text{card}(\mathcal{D}) + \text{card}\left(\mathcal{R} \cap \mathcal{C}\right) = \text{card}(\mathcal{L})$.

5. Soit ω une ligne brisée de $\mathcal{L}$.
Si $\omega \in \mathcal{R}$. On note I le point d'intersection de ω et l'axe $\left(O, \vec{i}\right)$ d'abscisse strictement positive et minimale.
On note ω_1 la ligne brisée $(M_0, \ldots, I)$ reliant M_0 à I, et ω_2 la ligne brisée $(I, \ldots, M_{m+n})$ la ligne brisée reliant I à M_{m+n}.
On note s la réflexion par rapport à l'axe des abscisses et on définit alors l'application $\Phi : \mathcal{L} \longrightarrow \mathcal{L}$ par $\Phi(w) = s(w_1) \cup w_2$ si $\omega \in \mathcal{R}$ et $\Phi(\omega) = \omega$ sinon.(cf figure)



a) Montrer que le nombre de lignes brisées appartenant à $\mathcal{D}$ est égal à $\dbinom{m+n-1}{m}$.

b) Montrer que Φ réalise une bijection de $\mathcal{R} \cap \mathcal{C}$ vers $\mathcal{D}$.

c) En déduire que le nombre de dépouillements vérifiant $\mathcal{P}$ est égal à $\dfrac{m-n}{m+n}\dbinom{m+n}{m}$.

d) En supposant qu'il y a équiprobabilité entre tous les dépouillements, déterminer la probabilité qu'un dépouillement vérifie la propriété $\mathcal{P}$.

Partie E : marche aléatoire

On s'intéresse désormais à une marche aléatoire d'un pion sur un axe gradué $\left(0, \vec{i}\right)$.

A l'instant n ($n \in \mathbb{N}$), le pion se trouve au point d'abscisse X_n, avec $X_0 = 0$. On procède de la façon suivante pour le déplacer.
On lance une pièce équilibrée :
– si le résultat est pile, le pion est alors positionné à l'instant $n+1$ sur le point d'abscisse $X_n + 1$;
– si le résultat est face, le pion est alors positionné à l'instant $n+1$ sur le point d'abscisse $X_n - 1$.
On note P_k la variable aléatoire égale à 1 si le résultat du k-ième lancer est pile et 0 sinon.

n désigne un entier naturel non nul.

1. Montrer que pour tout entier n supérieur ou égal à 1, $X_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} (2P_k - 1)$.

Dans la suite, r désigne un entier relatif.

2. **a)** Montrer l'implication suivante : $P(X_n = r) \neq 0 \Rightarrow n$ et r ont même parité.
b) La réciproque est-elle vraie ?

3. Montrer que pour tout entier naturel n ($n \geqslant 1$) il existe une variable aléatoire Y_n distribuée selon une loi binomiale et telle que $X_n = 2Y_n - n$.
Préciser les paramètres de la loi de Y_n.

4. En déduire une expression de $P(X_{2n} = 2r)$ en fonction de n et r.

5. **a)** Montrer que $P(X_{2n} = 2r) = P(X_{2n} = -2r)$.
b) En déduire que $P(X_{2n} > 0) = \dfrac{1 - P(X_{2n} = 0)}{2}$.
c) En utilisant la partie C, déterminer $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} P(X_{2n} > 0)$.

6. Dans cette question, n et r désignent des entiers naturels vérifiant $0 < r \leqslant n$.
a) Démontrer que $(X_{2n-1} > 0) \cap (X_{2n} > 0) \cap (X_{2n+1} > 0) = (X_{2n} > 0)$.
b) Pour tout entier naturel k, ($k \geqslant 1$), on note Z_k la variable aléatoire définie par $Z_k = k - Y_k$ où Y_k est la variable aléatoire définie à la question **3**.
Que représentent Y_k et Z_k ?
c) Montrer que $\displaystyle\bigcap_{k=1}^{n-1} (X_{2k} > 0) = \bigcap_{k=1}^{2n-1} (Y_k > Z_k)$.
d) Donner un exemple de suite de lancers de pièce illustrant l'événement $(X_{2n} = 2r) \cap \left(\displaystyle\bigcap_{k=1}^{n-1} (X_{2k} > 0)\right)$.
e) $P_{(X_{2n}=2r)}\left(\displaystyle\bigcap_{k=1}^{n-1} (X_{2k} > 0)\right)$ désigne la probabilité conditionnelle de l'événement $\displaystyle\bigcap_{k=1}^{n-1} (X_{2k} > 0)$ sachant l'événement $(X_{2n} = 2r)$.
En déduire à l'aide de la partie D, que :

$$P_{(X_{2n}=2r)}\left(\bigcap_{k=1}^{n-1} (X_{2k} > 0)\right) = \frac{r}{n}.$$

f) Montrer que pour tout entier n supérieur ou égal à 1 :

$$P\left(\bigcap_{k=1}^{n} (X_{2k} > 0)\right) = \frac{1}{2^{2n}} \sum_{r=1}^{n} \frac{r}{n} \binom{2n}{n+r}$$

.

g) Montrer que pour $r \leq n-1$, on a :

$$\frac{r}{n}\binom{2n}{n+r} + \binom{2n-1}{n+r} = \binom{2n-1}{n+r-1}$$

.

h) En déduire que, $P\left(\bigcap_{k=1}^{n}(X_{2k}>0)\right) = \frac{1}{2^{2n}}\left(\begin{array}{c}2n-1\\ n\end{array}\right)$.

7. On note p_n la probabilité que le pion ne retourne pas à l'origine lors des $2n$ premiers déplacements.

a) Montrer que $p_n = \frac{1}{2^{2n}}\binom{2n}{n}$.

b) En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} p_n$. Interpréter ce résultat.