CONCOURS DE RECRUTEMENT AU PROFESSORAT DE L'ENSEIGNEMENT DU SECOND DEGRE AGRICOLE **CAPESA**

CONCOURS D'ACCES à la 2ème catégorie des emplois de professeurs des établissements d'enseignement agricole privés

SESSION 2015

Concours : **EXTERNE**
Section : **MATHEMATIQUES**

DEUXIEME EPREUVE ECRITE D'ADMISSIBILITE

Etude de thème

(Coefficient 2 - Durée : 5 heures)

La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements interviendront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

L'usage des calculatrices de poche est autorisé, à condition qu'elles soient à fonctionnement autonome et qu'il ne soit pas fait usage d'imprimante.

Le sujet est constitué de deux thèmes et comporte cinq pages.

Thème : théorème de Pythagore

D'après la réciproque du théorème de Pythagore, si un triangle a des côtés de longueurs $3,\ 4$ *et* 5 *alors il est rectangle.*
L'objectif de ce problème est de déterminer les dimensions des triangles rectangles dont les longueurs des côtés sont des entiers.

Partie A : exemples de triangles rectangles

1. Soit ABC un triangle rectangle en A.

a) On suppose que $AB = 1$ et $AC = \sqrt{p}$ où p est un entier strictement positif.
Déterminer BC.

b) En déduire une méthode de construction d'un segment de longueur $\sqrt{3}$ avec une règle non graduée et un compas, à partir d'un segment donné de longueur 1.

2. Démontrer qu'il n'existe pas de triangle rectangle ayant pour dimension trois entiers et dont l'un vaut 1.

3. **a)** Déterminer tous les triangles rectangles ayant pour dimensions trois entiers consécutifs.

b) Soit un triangle rectangle dont les dimensions $a,\ b,\ c$ (avec $a \leq b \leq c$) sont les termes consécutifs d'une suite arithmétique.
Montrer que le triplet (a, b, c) est proportionnel au triplet $(3, 4, 5)$.

Partie B : quelques propriétés des triplets pythagoriciens

On appelle triplet pythagoricien tout triplet $(x, y, z) \in (\mathbb{N}^*)^3$ *tel que* $x \leqslant y \leqslant z$ *et* $x^2 + y^2 = z^2$.
On appelle triplet pythagoricien primitif tout triplet pythagoricien (x, y, z) *tel que le PGCD de* $x,\ y$ *et* z *est égal à* 1.

1. Soit (a, b, c) un triplet pythagoricien et $k \in \mathbb{N}^*$.
Démontrer que (ka, kb, kc) est un triplet pythagoricien.

2. Démontrer qu'il existe une infinité de triplet pythagoricien.

3. Soit $(k, n) \in (\mathbb{N}^*)^2$. Montrer que k^2 divise n^2 si et seulement si k divise n.
On pourra faire appel à la décomposition d'un entier en facteurs premiers.

4. Démontrer que dans un triplet pythagoricien si deux éléments sont divisibles par un entier naturel non nul p alors le troisième élément est aussi divisible par p.

5. En déduire que dans un triplet pythagoricien primitif, les éléments sont deux à deux premiers entre eux.

6. Démontrer que pour tout triplet pythagoricien (a, b, c) il existe un unique triplet pythagoricien primitif (u, v, w) et un unique entier naturel $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $(a, b, c) = (ku, kv, kw)$.

7. Démontrer que dans un triplet pythagoricien primitif (a, b, c), un et un seul élément est pair.

8. Démontrer que dans un triplet pythagoricien primitif (a, b, c), c est impair.

9. En déduire que $a < b$.

10. Soit $(p, q, p', q') \in (\mathbb{N}^*)^4$ tel que $\dfrac{p}{q}$ et $\dfrac{p'}{q'}$ sont des fractions rationnelles irréductibles vérifiant
$\left(\dfrac{p}{q}\right)^2 + \left(\dfrac{p'}{q'}\right)^2 = 1$. On suppose de plus $p \leqslant p'$.

a) Montrer que q et q' sont strictement supérieurs à 1.

b) Montrer que q divise q'. On pourra utiliser, après l'avoir démontré, que lorsque deux entiers sont premiers entre eux leurs carrés le sont également.

c) Démontrer que $q = q'$ et en déduire que (p, p', q) est un triplet pythagoricien primitif.

Partie C : détermination des triplets pythagoriciens

Le plan est rapporté à un repère orthonormé $\left(O,\ \vec{i},\ \vec{j}\ \right)$. *Soit* $\mathscr{C}$ *le cercle de centre* O *et de rayon 1. Les points* A *et* B *ont respectivement pour coordonnées* $(1, 0)$ *et* $(-1, 0)$. *On note* δ *la droite d'équation* $x = -1$.

1. Soit $t \in \mathbb{R}$. On définit le point M_t par $\overrightarrow{BM_t} = t\vec{j}$.
Déterminer les coordonnées de M_t dans $\left(O,\ \vec{i},\ \vec{j}\ \right)$.

2. Déterminer une équation cartésienne de la droite (AM_t) dépendant de t.

3. La droite (AM_t) coupe le cercle $\mathscr{C}$ en A et N_t.
Déterminer les coordonnées de N_t en fonction de t dans $\left(O,\ \vec{i},\ \vec{j}\ \right)$.

4. Montrer que pour tout $t \in \mathbb{Q}$, le point N_t est à coordonnées rationnelles.

5. Soit P un point de $\mathscr{C} \backslash \{A\}$ de coordonnées (u, v).

a) Les droites (AP) et δ se coupent en un point Q. Déterminer les coordonnées de Q.

b) Montrer que le réel t tel que $P = N_t$ vérifie $t = \dfrac{2v}{1-u}$.

6. En déduire que pour tout couple $(r, s) \in (\mathbb{Q}^{+*})^2$ vérifiant $r^2 + s^2 = 1$,
il existe un unique $t \in \mathbb{Q} \cap \left]2, +\infty\right[$ tel que $r = \dfrac{t^2-4}{t^2+4}$ et $s = \dfrac{4t}{t^2+4}$.

7. Soit (a, b, c) un triplet pythagoricien.

a) Montrer qu'il existe un unique $t \in \mathbb{Q} \cap \left]2, 2\sqrt{2}+2\right[$ tel que :

$$\frac{a}{c} = \frac{t^2-4}{t^2+4} \quad \text{et} \quad \frac{b}{c} = \frac{4t}{t^2+4}$$

b) En déduire qu'il existe deux entiers naturels non nuls p et q premiers entre eux tels que :

$$2q < p < (2\sqrt{2}+2)q, \quad \frac{a}{c} = \frac{p^2-4q^2}{p^2+4q^2} \quad \text{et} \quad \frac{b}{c} = \frac{4pq}{p^2+4q^2}$$

c) Peut-on affirmer que $(p^2 - 4q^2,\ 4pq,\ p^2 + 4q^2)$ est un triplet pythagoricien primitif ?

8. Soient n un entier naturel non nul et k un nombre premier.
Montrer que si k divise n^2 alors k divise n.

9. Soient p et q deux entiers naturels premiers entre eux tels que $2q < p < (2\sqrt{2}+2)q$.

a) Peut-on affirmer que $(p^2 - 4q^2,\ 4pq,\ p^2 + 4q^2)$ est un triplet pythagoricien ?

b) Montrer que si k est un diviseur premier de $p^2 - 4q^2$ et $p^2 + 4q^2$ alors k divise $2p^2$ et $8q^2$.
En déduire que $k = 2$.

c) En déduire que si p est impair, $(p^2 - 4q^2, 4pq, p^2 + 4q^2)$ est un triplet pythagoricien primitif.

10. Déterminer deux triplets pythagoriciens primitifs autres que $(3, 4, 5)$.

Thème : fonctions

Partie A : une estimation de $n!$

1. Soit φ la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par $\varphi(t) = t\ln(t) - t$.
Vérifier que φ est une primitive de la fonction ln sur $]0,+\infty[$.

2. Soient n et k deux entiers naturels tels que $1 \leqslant k \leqslant n-1$.

a) Démontrer que : $\forall t \in [k, k+1],\ \ln(k) \leqslant \ln(t) \leqslant \ln(k+1)$

b) A l'aide d'une intégration, déduire de l'encadrement précédent que :

$$\ln((n-1)!) \leqslant \varphi(n) + 1 \leqslant \ln(n!)$$

c) En déduire que : $(n-1)! \leqslant e\left(\dfrac{n}{e}\right)^n \leqslant n! \leqslant ne\left(\dfrac{n}{e}\right)^n$

Partie B : étude d'une fonction

Pour tout entier naturel $n \geq 1$, on considère la fonction f_n définie sur $\mathbb{R}$ par $f_n(x) = \dfrac{x^n(1-x)^n}{n!}$.

1. Démontrer que : $\forall x \in \mathbb{R},\ f_n(x) = \dfrac{(-1)^n}{n!}\displaystyle\sum_{k=n}^{2n}\binom{n}{k-n}(-1)^k x^k$

2. Montrer que pour tout réel $x \in]0,1[$, on a $0 < f_n(x) < \dfrac{1}{n!}$.

3. Soit p un entier naturel.
Si elle existe, on note $f_n^{(p)}$ la dérivée $p-$ième de f_n. Par convention $f_n^{(0)} = f_n$.

a) Justifier que f_n est indéfiniment dérivable sur $\mathbb{R}$.

b) Démontrer que pour $0 \leq p \leq n-1,\ f_n^{(p)}(0) = 0$.

c) Déterminer $f_n^{(p)}(0)$ pour $p \geq 2n+1$.

d) Justifier que pour $n \leq p \leq 2n,\ f_n^{(p)}(0)$ est un entier relatif.

4. Après avoir vérifié que, pour tout réel x, $f_n(x) = f_n(1-x)$, démontrer que :
pour tout entier naturel p, $f_n^{(p)}(1)$ est un entier relatif.

Partie C : irrationnalité de e^r pour tout $r \in \mathbb{Q}^*$

Soient $r \in \mathbb{Q}^*$.

1. Montrer que e^r est irrationnel si et seulement si e^{-r} est irrationnel.

Soit $(p,q) \in (\mathbb{N}^*)^2$ tel que $r = \dfrac{p}{q}$.

2. Démontrer que :

Si e^p est irrationnel alors e^r est irrationnel.

3. On suppose qu'il existe $(a,b) \in (\mathbb{N}^*)^2$ tel que $e^p = \dfrac{a}{b}$.

a) Justifier que $a > b$

b) Montrer que pour tout entier $n > 0$, $\left(\dfrac{n}{ep^2}\right)^n \times \dfrac{e}{p} \leqslant \dfrac{n!}{p^{2n+1}}$

En déduire qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que $ap^{2n_0+1} < n_0!$

c) On considère les fonctions ζ et θ définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$\zeta(x) = \sum_{k=0}^{2n_0} (-1)^k p^{2n_0-k} f_{n_0}^{(k)}(x) \text{ et } \theta(x) = e^{px}\zeta(x)$$

Montrer que pour tout réel x, $\zeta'(x) = -p\zeta(x) + p^{2n_0+1} f_{n_0}(x)$

En déduire que pour tout réel x, $\theta'(x) = p^{2n_0+1} e^{px} f_{n_0}(x)$.

d) Soit $K = b \displaystyle\int_0^1 p^{2n_0+1} e^{pt} f_{n_0}(t) dt$.

Justifier que $K \in \mathbb{N}^*$.

e) Montrer que $K \leqslant \dfrac{ap^{2n_0+1}}{n_0!}$.

f) Conclure.