CONCOURS DE RECRUTEMENT AU PROFESSORAT DE L'ENSEIGNEMENT DU SECOND DEGRÉ AGRICOLE **C A P E S A**

CONCOURS D'ACCÈS à la 2e catégorie des emplois de professeurs des établissements d'enseignement agricole privés

SESSION 2013

Concours : EXTERNE
Section : **MATHÉMATIQUES**

DEUXIÈME ÉPREUVE ÉCRITE D'ADMISSIBILITÉ

Étude de thème

(Coefficient 2 : - Durée : 5 heures)

La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements interviendront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
L'usage des calculatrices de poche est autorisé, à condition qu'elles soient à fonctionnement autonome et qu'il ne soit pas fait usage d'imprimante.

Le sujet comporte six pages.
Il est composé de deux exercices indépendants l'un de l'autre.

Exercice 1

Thème d'étude : suites de nombres réels et complexes, convergence, suites adjacentes, vitesse de convergence, algorithme, approximation d'une solution d'équations.

Partie I : préliminaires

Soient $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite strictement croissante et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite strictement décroissante telles que :

$$\lim_{n\to+\infty}(a_n-b_n)=0.$$

On dit alors que les suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes.

1. Montrer que la suite $(b_n-a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement décroissante.
2. Montrer que, pour tout entier naturel n : $b_n-a_n\geqslant 0$.
3. Montrer que les suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent et ont la même limite notée ℓ.
4. Montrer que, pour tout entier naturel n : $a_n<\ell<b_n$.

Partie II

On considère les suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définies, pour tout entier naturel n non nul, par :

$$a_n=\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}\qquad\text{et}\qquad b_n=a_n+\frac{1}{n.n!}\ .$$

1. Montrer que les suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sont adjacentes.
2. L'objectif de cette question est de montrer que la limite commune de ces deux suites, notée ℓ, est un nombre irrationnel.
   On suppose qu'il existe deux entiers naturels non nuls p et q tels que $\ell=\dfrac{p}{q}$.
   (a) Montrer que, pour tout entier naturel n non nul : $a_n.n!$ est un entier.
   (b) Montrer que : $0<p.q!-a_q.q.q!<1$.
   (c) En déduire que ℓ est un nombre irrationnel.

Partie III

On se propose de déterminer cette limite ℓ.
Dans cette partie, a désigne un nombre réel strictement positif.
On considère les suites $(f_a(n))_{n\in\mathbb{N}}$ et $(\varphi_a(n))_{n\in\mathbb{N}}$ définies par :

$$f_a(n)=\int_0^a t^n\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t\qquad\text{et}\qquad \varphi_a(n)=\mathrm{e}^a\left[1-\frac{f_a(n)}{n!}\right].$$

1. Soit n un entier naturel.
   (a) Calculer $f_a(0)$ et $\varphi_a(0)$.
   (b) Exprimer $f_a(n+1)$ en fonction de $f_a(n)$.
   (c) En déduire une expression de $\varphi_a(n+1)$ en fonction de $\varphi_a(n)$.
   (d) Montrer que : $\varphi_a(n)=\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\frac{a^k}{k!}$.

2. Montrer que, pour tout entier naturel n non nul : $\dfrac{a^{n+1}}{\mathrm{e}^a\,(n+1)} \leqslant f_a(n) \leqslant \dfrac{a^{n+1}}{n+1}$.

3. On considère la suite $(u_a(n))_{n\in\mathbb{N}}$ définie, pour tout entier naturel n, par : $u_a(n) = \dfrac{a^n}{n!}$.

   (a) Calculer, pour tout entier naturel n : $\dfrac{u_a(n+1)}{u_a(n)}$.

   (b) Montrer qu'il existe un entier naturel n_1 et une suite géométrique $(t_a(n))_{n\in\mathbb{N}}$ dépendant de a et de raison $\frac{1}{2}$ tels que, pour tout entier n supérieur ou égal à n_1 : $u_a(n) \leqslant t_a(n)$.

   (c) En déduire que la suite $(u_a(n))_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente et déterminer sa limite.

4. Montrer que la suite $(\varphi_a(n))_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente et préciser sa limite.

5. Rédiger une synthèse des résultats obtenus.

Partie IV

1. (a) Montrer que, pour tout nombre réel x : $\mathrm{e}^x \geqslant 1 + x$.

   (b) En déduire que, pour tout entier naturel n non nul : $\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n \leqslant \mathrm{e}$.

2. (a) Montrer que, pour tout nombre réel x strictement inférieur à 1 : $\mathrm{e}^x \leqslant \dfrac{1}{1-x}$.

   (b) En déduire que, pour tout entier naturel n non nul : $\mathrm{e} \leqslant \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^{n+1}$.

3. (a) Montrer que : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} - \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}\right] = 0$.

   (b) En déduire que : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n} = \mathrm{e}$.

Partie V

L'objectif de cette partie est de comparer les vitesses de convergence vers e des suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(c_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ respectivement définies, pour tout entier naturel n non nul, par :

$$a_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \qquad \text{et} \qquad c_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n.$$

1. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle convergeant vers ℓ telle que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{|u_{n+1}-\ell|}{|u_n-\ell|} = k$.

   Montrer que k appartient à l'intervalle $[0;1]$.

2. La convergence de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vers ℓ est dite :
   - lente si $k = 1$;
   - de type géométrique si $0 < k < 1$;
   - rapide si $k = 0$.

   (a) En utilisant des résultats des parties I et II, étudier la vitesse de convergence vers e de la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

   (b) Etudier la vitesse de convergence vers e de la suite $(c_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

Exercice 2

Thème d'étude : problème des moindres carrés en statistique, approche matricielle.

Notations

- Pour tous entiers naturels non nuls n et p, on note $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices à n lignes et p colonnes à coefficients réels.
- On identifie toute matrice à 1 seule ligne et 1 seule colonne au seul réel qu'elle contient.
- La transposée d'une matrice M de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ est notée ${}^tM$.
- Pour tout entier naturel n non nul, on désigne par E_n l'espace vectoriel des matrices à n lignes et 1 colonne.
  - Pour tous vecteurs Y et Z de E_n, on note : $\langle Y, Z\rangle = {}^tZ\,Y$ le produit scalaire de Y et Z.
  - Pour tout vecteur Y de E_n, on note : $\|Y\| = \sqrt{\langle Y, Y\rangle} = \sqrt{{}^tY\,Y}$ la norme de Y.
  - On désigne par 0 le vecteur nul de E_n.
- Pour toute matrice A de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ on note :

$$\operatorname{Ker} A = \left\{X \in E_p \Big/ AX = 0\right\} \quad \text{et} \quad \operatorname{Im} A = \left\{Y \in E_n \Big/ \exists X \in E_p \text{ tel que } Y = AX\right\}.$$

Partie I

1. Soit A une matrice quelconque de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$. Montrer que :
   $\operatorname{Ker} A$ est un sous-espace vectoriel de E_p et $\operatorname{Im} A$ un sous-espace vectoriel de E_n.
2. Soient M une matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ et N une matrice de $\mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{R})$. Montrer que :
$$\operatorname{Im} MN \subset \operatorname{Im} M \quad \text{et} \quad \operatorname{Ker} N \subset \operatorname{Ker} MN.$$
3. Soit Y un vecteur de E_n. Montrer que : $\|Y\| = 0$ si et seulement si $Y = 0$
4. Montrer que, pour tout couple (Y, Z) de vecteurs de E_n et tout réel λ :
$$\|Y + \lambda Z\|^2 = \|Y\|^2 + 2\lambda\,{}^tZ\,Y + \lambda^2\,\|Z\|^2.$$

Dans les parties II et III, A désigne une matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ et B un vecteur de E_n.

Partie II

1. Montrer que tout vecteur X de $\operatorname{Ker} {}^tA\,A$ vérifie : $\|AX\| = 0$.
2. Montrer l'égalité des deux espaces vectoriels $\operatorname{Ker} {}^tA\,A$ et $\operatorname{Ker} A$.
3. En déduire que les matrices ${}^tA\,A$ et A ont même rang puis que $\operatorname{Im} {}^tA\,A = \operatorname{Im} {}^tA$.
4. Montrer qu'il existe un vecteur X de E_p tel que : ${}^tAAX = {}^tAB$.

Partie III

On note $(\mathcal{E})$ l'équation matricielle $AX = B$ d'inconnue X appartenant à E_p.

- X est dite solution de $(\mathcal{E})$ si $AX = B$.
- X élément de E_p est dite pseudo-solution de $(\mathcal{E})$ si :

$$\forall Z \in E_p\,,\ \|AX - B\| \leq \|AZ - B\|.$$

1. On suppose que $(\mathcal{E})$ admet au moins une solution. Montrer que :
   X est une pseudo-solution de $(\mathcal{E})$ si et seulement si X est solution de $(\mathcal{E})$.
2. Dans cette question, on suppose que X est une pseudo-solution de $(\mathcal{E})$.
   (a) Montrer que : $\forall\lambda \in \mathbb{R},\ \forall U \in E_p\ ,\ \|AX - B\| \leq \|AX - B - \lambda AU\|$.
   (b) En déduire que : $\forall\lambda \in \mathbb{R},\ \forall U \in E_p\ ,\ \lambda^2 \|AU\|^2 - 2\lambda\, {}^tU\, {}^tA\, (AX - B) \geq 0$.
   (c) Montrer que : $\forall U \in E_p\ ,\ {}^tU\, {}^tA\, (AX - B) \leq 0$.
   (d) En déduire que : ${}^tAAX = {}^tAB$.
3. On suppose que : ${}^tAAX = {}^tAB$.
   Montrer que X est pseudo-solution de $(\mathcal{E})$.
4. Dans cette question, on suppose que le rang de la matrice A est égal à p.
   (a) Montrer que la matrice ${}^tAA$ est inversible.
   (b) En déduire que $(\mathcal{E})$ admet une unique pseudo-solution X .

Partie IV : application

On munit le plan $\mathcal{P}$ d'un repère orthonormal $\left(O\,;\overrightarrow{i}\,,\overrightarrow{j}\right)$. n désigne un entier supérieur ou égal à 2.
On considère n points $M_1, M_2, \cdots, M_n$ d'abscisses respectives $x_1, x_2, \cdots, x_n$ non toutes égales et d'ordonnées respectives $y_1, y_2, \cdots, y_n$ non toutes égales.
Pour toute droite $(\mathcal{D})$ non parallèle à l'axe des ordonnées et, pour tout entier i compris entre 1 et n, on note $N_i^{\mathcal{D}}$ le projeté du point M_i sur la droite $(\mathcal{D})$ parallèlement à l'axe des ordonnées.

Dans cette partie, on se propose de démontrer la proposition suivante :

$\mathcal{H}$: « Parmi ces droites, il existe une unique droite $(\mathcal{D})$ telle que $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} {N_i^{\mathcal{D}}M_i}^2$ soit minimale ».

1. Montrer que la proposition $\mathcal{H}$ est équivalente à la proposition :
   $\mathcal{K}$: « il existe un unique couple (a_0, b_0) de $\mathbb{R}^2$ tel que, pour tout couple (a, b) de $\mathbb{R}^2$:
$$\sum_{i=1}^{n} (a_0x_i + b_0 - y_i)^2 \leq \sum_{i=1}^{n} (ax_i + b - y_i)^2 \qquad (1) \text{ ».}$$
2. On considère le système d'équations
$$\left\{\begin{array}{rcl} ax_1 + b & = & y_1 \\ ax_2 + b & = & y_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ ax_n + b & = & y_n \end{array}\right. \quad \text{d'inconnue } \theta = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}.$$
   (a) Montrer que le système précédent est équivalent à une équation matricielle de la forme
$$A\theta = Y \qquad (S_1)$$
   où l'on précisera la matrice A et la matrice Y.
   (b) Montrer que : (a_0, b_0) vérifie l'inégalité (1) de la proposition $\mathcal{K}$ si et seulement si
$$\begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \end{pmatrix} \text{ est pseudo-solution de } (S_1).$$

(c) Justifier que l'équation matricielle (S_1) admet une unique pseudo-solution notée $\widehat{\theta} = \begin{pmatrix} \widehat{a} \\ \widehat{b} \end{pmatrix}$.

(d) En déduire que la proposition $\mathcal{H}$ est vérifiée.

3. (a) Déterminer la matrice ${}^tAA$ puis son inverse $({}^tAA)^{-1}$.

   (b) Déterminer ${}^tAY$ et en déduire $\widehat{\theta}$.

   (c) Que représentent d'un point de vue statistique les coordonnées de $\widehat{\theta}$?