

2.6 Analyse de l'épreuve et commentaires par questions

Dans la partie VRAI OU FAUX du sujet, il faut faire apparaître clairement la conclusion, que ce soit en début ou en fin de réponse.

Par ailleurs, ce sujet est de difficulté progressive ; il est donc important que les premières questions soient abordées avec rigueur, de nommer les propriétés que l'on utilise et de prendre le temps de vérifier les hypothèses des théorèmes que l'on applique.

Dans l'exercice préliminaire on remarque des confusion entre produit scalaire, forme bilinéaire symétrique et norme (oublis du carré et de vérifier toutes les conditions) et souvent la symétrie des matrices (par ailleurs souvent simple à prouver) n'est pas vérifiée ou oubliée ; à ce propos on rappelle qu'une matrice réelle ayant des valeurs propres toutes positives n'est pas forcément dans $S_n^+(\mathbb{R})$.

Des remarques similaires sont valables pour la positivité : par exemple, la positivité du déterminant d'une matrice A ne garantit pas que toutes les valeurs propres de A sont positives.

Dans la première partie et les suivantes, les questions deviennent plus complexes et il faut s'efforcer de comprendre le sens du sujet, faire la distinction entre les différentes sections et savoir réutiliser ou adapter les résultats précédents. Dans ce contexte, les remarques faites précédemment restent d'autant plus valables ; il est nécessaire de montrer et rappeler les hypothèses (l'argument de dimension finie pour dire qu'un fermé borné est compact est souvent omis, ou encore dans la question 51 il faut rappeler que le vecteur u est non nul), de vérifier les notations à chaque pas (un nombre assez important de candidats pensent que C est encore la boule unité pour ces questions), de préciser la nature des objets (parfois $J(x)$ est traité comme un ensemble alors que c'est un nombre), de connaître les définitions usuelles (comme celle de sous-espace affine) ou encore d'évoquer pertinemment les théorèmes (dans la question 26 les candidats ne pensent pas à l'inégalité de Cauchy-Schwarz).

VRAI OU FAUX :

Q1 : Il est important, particulièrement dans les premières questions du sujet, de nommer les propriétés que l'on utilise et de prendre le temps de vérifier les hypothèses des théorèmes que l'on applique. Par exemple, il faut mentionner la continuité des fonctions lorsque l'on utilise le théorème fondamental de l'analyse ; attention à ne pas évoquer ce théorème lorsque l'intégrande dépend de x . C'était une difficulté pour cette question. Lors de la rédaction d'une intégration par parties, il convient de citer le caractère C^1 .

Q2 : Cette question, pourtant très classique et ne présentant pas de difficulté particulière, est trop souvent évitée ou mal traitée. Peu de candidats évoquent la continuité de la fonction à intégrer. Un grand nombre de candidats qui abordent cette question pensent que si la fonction tend vers 0 en l'infini alors l'intégrale converge ou inversement si la fonction tend vers $-\infty$ en 0 alors elle diverge. Autrement dit, chez beaucoup de candidats, on note une confusion du comportement de f avec celui de son intégrale.

Le recours aux intégrales de Bertrand est à éviter ici. Il s'agit de la deuxième question du sujet et les candidats doivent étudier explicitement la convergence.

Il est important de parler du signe de l'intégrande lors de l'utilisation d'un équivalent (ou de l'intégrabilité de la fonction de référence).

Q3 : La positivité d'une probabilité est un argument important très souvent négligé. Certains n'hésitent pas à introduire la somme de la série harmonique.

Trop de candidats parlent de P dès le début du raisonnement alors même que l'objectif est précisément d'établir l'existence de P .

Q4 : La notion d'indépendance de variables aléatoires est un argument à ne pas oublier ; trop de candidats considèrent, par défaut, que les variables aléatoires sont indépendantes. De plus, si le résultat est vrai lorsque les variables aléatoires sont indépendantes, n'implique en rien que si les variables aléatoires ne sont pas indépendantes alors le résultat est faux. Il s'agit là d'une faute de logique importante.

Q6 : Un dessin est apprécié. Attention, l'union de deux intervalles disjoints peut être connexe ; c'est le cas par exemple pour $[0, 1[$ et $[1, 2]$. Un contre-exemple correctement justifié est préférable à une affirmation générale incertaine.

Q7 : Le fait que les ensembles convexes de $\mathbb{R}$ soient les intervalles est en général connu. En revanche le fait de montrer que la densité d'un tel ensemble dans $\mathbb{R}$ implique qu'il s'agit de $\mathbb{R}$ tout entier est très souvent mal justifié. Certains candidats pensent (à tort) que les seules parties denses de $\mathbb{R}$ sont $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R}$.

Exercice préliminaire :

Dans certaines copies, on a constaté des confusions entre ϕ et le produit scalaire usuel de $\mathbb{R}^n$.

Q8 : Cette question classique a plutôt bien été traitée ; parfois, des confusions entre norme et produit scalaire ont été observées. De plus, un produit scalaire ne se limite pas à une forme bilinéaire symétrique. Cette dernière propriété est souvent trop hâtivement démontrée.

Q9 : Il est regrettable que des candidats confondent les symboles d'appartenance et d'inclusion, par exemple en écrivant $Sp(A)$ appartient à $\mathbb{R}^+$. De même, malgré le préambule, certains confondent le produit scalaire de $\mathbb{R}^n$ et celui des matrices carrées et écrivent à tort $\langle Ax, x \rangle = \text{tr}(Ax x^T)$.

Pour montrer que A est symétrique et positive, il faut montrer que $\langle Ax, x \rangle \geq 0$ pour tout x et pas seulement pour un vecteur propre. Et écrire que si c'est vrai pour un vecteur propre, c'est vrai pour tout x car A admet une base de vecteurs propres, n'est pas recevable sans plus d'explications.

Il est important de rappeler que $(a \geq 0 \text{ et } ab \geq 0)$ n'implique pas $b \geq 0$. En effet, le couple $(a, b) = (0, -1)$ nous en donne un contre-exemple simple. Aussi, dans la question 9.a, l'inégalité $\lambda \|x\|^2 \geq 0$ implique $\lambda \geq 0$ car $\|x\| > 0$ du fait que x est un vecteur propre. Cette justification, souvent omise, est fondamentale ici.

Dans la suite de l'épreuve, certains candidats considèrent qu'une matrice réelle ayant des valeurs propres toutes positives appartient à $S_n^+(\mathbb{R})$; c'est faux si la matrice n'est pas symétrique. De même, certains candidats pensent qu'il suffit de montrer que le déterminant d'une matrice A est positif pour garantir que toutes les valeurs propres de A sont positives ; là encore, il est facile de construire des contre-exemples avec une matrice diagonale par exemple.

Enfin, certains candidats pensent qu'une matrice diagonalisable est diagonale.

Q10 : Certains candidats montrent directement le caractère positif sans vérifier que la matrice $B^T A B$ est symétrique.

Q11 : Même remarque que pour la question 10. Il ne faut pas uniquement montrer que pour $t \in [0, 1]$ et A, B symétriques positives (resp. définies positives) la matrice $tA + (1-t)B$ est positive (resp. définie positive) ; il faut au préalable préciser avant que c'est une matrice symétrique. Certains candidats pensent que l'image réciproque d'un convexe par une application continue est un convexe ; on note une confusion entre convexe et connexe. Néanmoins cette question est assez souvent bien réussie.

Q12 : Attention, l'ensemble des matrices symétriques ayant valeurs propres positives n'est pas un espace vectoriel. Pour montrer le caractère fermé, dire que $S_n^+(\mathbb{R})$ est l'image réciproque de $\mathbb{R}_+$ par l'application continue $x \mapsto \langle Ax, x \rangle$ n'est pas suffisant.

Q13 : L'inclusion de l'adhérence de S_n^{++} dans S_n^+ est souvent obtenue, mais l'inclusion réciproque est rarement traitée. On note quelques inclusions dans le mauvais sens entre S_n^{++} et S_n^+ .

Q14 : Attention à bien diagonaliser S dans une base orthonormée. Il ne suffit pas de considérer P inversible telle que $P^{-1}SP$ soit diagonale ; on a besoin que P soit dans $O(n)$, c'est ce qui permet d'obtenir que R est symétrique. Alors que cette dernière propriété est rarement vérifiée, la plupart des candidats se contentent de signaler que ses valeurs propres sont strictement positives.

De façon générale, dans cet exercice préliminaire, même si les questions étaient de difficultés variables, les objets manipulés restaient très classiques ; les candidats doivent être à l'aise avec toutes ces notions.

Première partie

Dans cette partie, des candidats utilisent des inégalités entre des vecteurs, d'autres assimilent une borne inférieure à un minimum et certains considèrent $J(x)$ comme un ensemble alors que c'est un nombre ; ces erreurs ne sont pas acceptables.

Q16 : L'argument de dimension finie pour dire qu'un fermé borné est compact est souvent omis. Certains candidats se contentent de dire que $0 \in C$, alors qu'il fallait justifier que 0 était intérieur à C .

Q17 à Q20 : Un nombre assez important de candidats pensent que C est encore la boule unité pour ces questions et certains prennent x dans C , alors que x doit être pris dans $\mathbb{R}^n$.

Attention, lorsque A est inclus dans $[0, +\infty[$, $\inf A = 0$ n'implique pas que pour tout $\epsilon > 0$, on a $\epsilon \in A$. On ne peut pas non plus dire que $0 \in A$.

Deuxième partie

Q24 : La projection orthogonale sur un sous-espace n'est pas toujours bien utilisée.

Q25 a) : La définition de sous-espace affine n'est pas bien connue.

Q26 b) : Les candidats ne pensent pas à l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

Cinquième partie

Q46 : Question souvent abordée, mais les candidats oublient de préciser que f est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ avant de dériver.

De plus, l'intérêt de la convexité de f pour les questions suivantes n'est pas compris.

Sixième partie

Q51 : Question souvent traitée. Il faut rappeler que le vecteur u est non nul pour conclure rigoureusement sur les dimensions. Certains pensent que $\langle u, v \rangle = 0$ et $u \neq 0$ implique que $v = 0$ (ce qui n'est vrai que si l'espace est de dimension 1).

2.7 Conseils aux candidates et aux candidats

Il est très fortement conseillé d'écrire à l'encre noire ou bleu foncé sur les copies. Les copies étant scannées, l'encre bleu clair peut être difficile à décrypter. Puisqu'il s'agit d'un concours à destination d'enseignants, on s'attend à une présentation propre des copies. Or, la qualité rédactionnelle des copies laisse parfois à désirer, avec une orthographe approximative et une écriture peu lisible. Il est donc essentiel d'écrire avec soin et clarté rédactionnelle : suivre les lignes des copies, mettre en évidence les résultats obtenus, numéroter les questions, utiliser préalablement des brouillons pour établir les raisonnements. Sur le plan mathématique, il faut citer les énoncés utilisés, mettre en évidence la vérification des hypothèses, quantifier les expressions mathématiques, vérifier la cohérence de ce que l'on écrit, préciser la nature des objets mathématiques et ainsi éviter certaines erreurs, comme écrire qu'un nombre est égal à un ensemble ou faire une confusion entre les symboles d'appartenance et d'inclusion. Il est par ailleurs déconseillé de recopier les énoncés des questions sur les copies, afin que les correcteurs puissent bien identifier où commence le développement du candidat.

3 Rapport sur les épreuves orales

Les épreuves orales ont pour objectif « d'évaluer la capacité de concevoir, de mettre en œuvre et d'analyser l'enseignement d'une question mathématique donnée », ainsi que l'énonce l'arrêté