

Remarque importante : la correction proposée ci-dessous n'est pas celle attendue par les candidats ; toutes les affirmations doivent être justifiées proprement.

1. C'est vrai. On pose $g : x \mapsto \int_0^x (x-t)f(t)dt$. On a

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g(x) = x \int_0^x f(t)dt - \int_0^x tf(t)dt.$$

g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g'(x) = \int_0^x f(t)dt - xf(x) + xf(x) = \int_0^x f(t)dt.$$

g' est dérivable sur $\mathbb{R}$ et

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g''(x) = f(x).$$

2. C'est vrai. Il est clair que $t \mapsto \frac{\ln(t)}{1+t^2}$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$. Comme $\frac{\ln(t)}{1+t^2} \underset{t \rightarrow 0^+}{\sim} \ln(t)$ et $\frac{\ln(t)}{1+t^2} \underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} O\left(\frac{1}{t^{3/2}}\right)$, des arguments usuels assurent l'intégrabilité de $t \mapsto \frac{\ln(t)}{1+t^2}$ sur $\mathbb{R}_+^*$. Le changement de variable $u = \frac{1}{t}$ assure la nullité de l'intégrale.

3. C'est vrai. On munit $\mathbb{N}^*$ de la tribu $\mathcal{P}(\mathbb{N}^*)$. Comme la série $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n(n+1)}$ converge et que sa somme vaut 1, on définit bien une variable aléatoire dont la loi est donnée dans l'énoncé.

4. C'est faux. Si $X = Y$, la variable aléatoire XY est presque-sûrement constante égale à 1.

5. C'est vrai. On a $\overline{A} = B$ et $\overline{B} = E$. Donc $\overline{A} = \overline{\overline{B}} = \overline{B} = E$.

6. C'est faux. Dans $\mathbb{R}$, la réunion $[0, 1] \cup [2, 3]$ est une réunion de deux convexes et n'est pas convexe.

7. C'est vrai. Soit C un tel convexe. Comme C est dense dans $\mathbb{R}$, C n'est pas borné. En particulier, C contient une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ qui tend vers $+\infty$ et une suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tend vers $-\infty$. Quitte à considérer la suite à partir d'un certain rang, on peut supposer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n \leq u_n$. Par convexité, on a $\mathbb{R} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} [v_n, u_n] \subset C$, d'où $C = \mathbb{R}$.

8. — Φ est clairement symétrique.

— La bilinéarité est claire.

— La positivité de Φ est claire car $\Phi(A, A) = \sum_{1 \leq i, j \leq n} a_{i,j}^2 \geq 0$.

— Le caractère défini est clair en utilisant le fait que $\Phi(A, A) = \sum_{1 \leq i, j \leq n} a_{i,j}^2$.

Il s'ensuit que Φ est un produit scalaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

9. (a) On prouve les deux implications.

($\Rightarrow$) Soit $\lambda \in \text{Sp}(A)$, il existe $x \in \mathbb{R}^n$ non nul tel que $Ax = \lambda x$. On a donc $\lambda = \frac{\langle Ax, x \rangle}{\|x\|^2} \geq 0$, donc $\text{Sp}(A) \subset \mathbb{R}_+$.

($\Leftarrow$) On suppose que $\text{Sp}(A) \subset \mathbb{R}_+$. Comme $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$, il existe P orthogonale et $D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ (où tout $\lambda_i \in \text{Sp}(A)$) telles que $A = PDP^\top$. Soit $x \in \mathbb{R}^n$. On a

$$\langle Ax, x \rangle = \langle PDP^\top x, x \rangle = \langle Dy, y \rangle,$$

où l'on a posé $y = P^\top x$. Il s'ensuit que

$$\langle Ax, x \rangle = \sum_{i=1}^n \lambda_i y_i^2 \geq 0.$$

(b) On a : pour tout $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$, $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R}) \iff \text{Sp}(A) \subset \mathbb{R}_+^*$. La preuve est presque la même que celle ci-dessus.

10. Il est clair que $B^\top AB \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. Pour tout $x \in \mathbb{R}^n$ avec $x \neq 0$, on a :

$$\langle B^\top ABx, x \rangle = (Bx)^\top A(Bx) > 0,$$

car $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ et $Bx \neq 0$ car B est inversible.

11. On prouve le résultat pour $\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$, la preuve étant analogue pour $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$. Soient A et B deux éléments de $\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$. Soit $t \in [0, 1]$. Il est clair que la matrice $tA + (1 - t)B$ est symétrique réelle et pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, on a :

$$\langle (tA + (1 - t)B)x, x \rangle = t\langle Ax, x \rangle + (1 - t)\langle Bx, x \rangle \geq 0,$$

ainsi $tA + (1 - t)B \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$, donc $\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ est convexe.

12. Soit $(A_p)_{p \in \mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ qui converge vers une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, pour conclure que $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ on peut utiliser que la convergence dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ entraîne la convergence coordonnée par coordonnée et que les coordonnées (i, j) et (j, i) coïncident pour tout (A_p) . Soit $x \in \mathbb{R}^n$. Pour tout $p \in \mathbb{N}$, on a $\langle A_p x, x \rangle \geq 0$. En faisant tendre p vers $+\infty$ et en utilisant la continuité du produit scalaire, on en déduit que $\langle Ax, x \rangle \geq 0$, ce qui prouve que $A \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$, puis que $\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ est fermé.

13. Soit $A \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$. D'après la question 9 (a), il existe P orthogonale et $D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$, avec pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $\lambda_i \geq 0$, telles que $A = PDP^\top$.

Soit, pour $p \in \mathbb{N}^*$, $A_p = P \left(D + \frac{1}{p} I_n \right) P^\top$. Il est clair que A_p est symétrique et d'après la question 9 (b), $A_p \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.

De plus, il est clair que $\lim_{p \rightarrow +\infty} A_p = A$, donc $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ est dense dans $\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$.

14. — Comme $S \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$, on écrit $S = PDP^\top$ avec $D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ diagonale ayant des coefficients strictement positifs et P orthogonale. On pose $\Delta = \text{diag}(\sqrt{\lambda_1}, \dots, \sqrt{\lambda_n})$ et $R = P\Delta P^\top$. Il est clair que $R \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ et que $R^2 = S$.

— Soit $U \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ telle que $U^2 = S$. Comme $U \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ il existe $G = \text{diag}(\mu_1, \dots, \mu_n)$ diagonale ayant des coefficients strictement positifs et Q orthogonale telles que $U = QGQ^\top$. Donc $P^\top QG^2 = D^2 P^\top Q$; en posant $M = P^\top Q$, en raisonnant coordonnée par coordonnée et en appliquant le fait que pour tout $i = 1, \dots, n$, λ_i et μ_i sont strictement positifs on peut conclure que $U = R$.

15. — Comme $S^{1/2} \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$, $S^{1/2}$ est bien inversible.

— Si on écrit $S = PDP^\top$ avec $D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ diagonale et P orthogonale, par unicité, on a $S^{1/2} = P\Delta P^\top$ avec $\Delta = \text{diag}(\sqrt{\lambda_1}, \dots, \sqrt{\lambda_n})$. On a alors $(S^{1/2})^{-1} = P \text{diag}(\sqrt{\lambda_1}^{-1}, \dots, \sqrt{\lambda_n}^{-1}) P^\top$ et comme $S^{-1} \in \mathcal{S}_n^{++}$, $(S^{-1})^{1/2} = P \text{diag}(\sqrt{\lambda_1}^{-1}, \dots, \sqrt{\lambda_n}^{-1}) P^\top$, ce qui prouve l'égalité.

16. Il est clair que C est un compact car c'est une partie fermée (par continuité de la norme) et bornée. La convexité provient de l'inégalité triangulaire et le « symétrique » vient de l'homogénéité de la norme.

17. — Soit $x_0 \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. Comme 0 appartient à l'intérieur de C il existe $r > 0$ tel que $B(0, r) \subset C$. En particulier, le vecteur $\frac{r}{2\|x_0\|} x_0 \in C$. Il s'ensuit que l'ensemble $\left\{ \lambda \in \mathbb{R}_+^*, \frac{1}{\lambda} x_0 \in C \right\}$ n'est pas vide. Comme il est minoré par 0, il admet une borne inférieure.

— Pour $x = 0$, pour tout $\lambda > 0$, $\frac{1}{\lambda}x \in C$, donc $J(0)$ est bien définie et $J(0) = \inf \mathbb{R}_+^* = 0$.

18. On prouve les deux implications.

($\Rightarrow$) Soit $x_0 \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. Comme C est compact, il existe $R > 0$ tel que $C \subset B(0, R)$. En particulier, pour tout λ tel que $0 < \lambda < \frac{\|x_0\|}{R}$, soit $\left\| \frac{x_0}{\lambda} \right\| > R$, on a $\frac{x_0}{\lambda} \notin C$. Il s'ensuit que $\left\{ \lambda \in \mathbb{R}_+^*, \frac{1}{\lambda}x_0 \in C \right\} \subset \left[\frac{\|x_0\|}{R}, +\infty \right[$ et en particulier, $J(x_0) \geq \frac{\|x_0\|}{R}$.

($\Leftarrow$) Cette implication découle du fait que $J(0) = 0$.

19. (a) C'est clair par homogénéité de la borne inférieure et car C est symétrique.

(b) Soit $x \in \mathbb{R}^n$. Soit $\mu \in \mathbb{R}$. Si $\mu = 0$, l'égalité est claire ; il en est de même du cas où $\mu > 0$ (c'est la question précédente). Si $\mu < 0$, on se ramène à la question précédente en remarquant que, comme C est symétrique :

$$\forall \lambda > 0, \quad \left(\frac{1}{\lambda}(\mu x) \in C \right) \iff \left(\frac{1}{\lambda}(-\mu x) \in C \right).$$

20. On prouve les deux inclusions.

($\subset$) Soit $x \in C$. Comme $\frac{x}{1} \in C$, il s'ensuit que $J(x) \leq 1$.

($\supset$) Soit $x \in \mathbb{R}^n$ tel que $J(x) \leq 1$. Comme C est fermé $\frac{x}{J(x)} \in C$. Comme $0 \in C$, le segment $\left\{ t \frac{x}{J(x)}, t \in [0, 1] \right\}$ est inclus dans C . En particulier, $x \in C$.

21. (a) C'est clair d'après les questions 19 et 20. Comme $\alpha \in [0, 1]$, la convexité de C assure que $z \in C$.

(b) Comme $z \in C$, la question 20 assure que $J(z) \leq 1$. Comme $z = \frac{x+y}{J(x) + J(y) + 2\varepsilon}$, on a $J(x+y) \leq J(x) + J(y) + 2\varepsilon$. Il suffit de faire tendre ε vers 0 pour conclure.

22. (a) Les questions 18, 19 et 21 assurent que J est une norme sur $\mathbb{R}^n$.

(b) La question 20 assure que C est la boule unité de J .

(c) Par homogénéité, la sphère unité de J est ∂C .

23. Supposons qu'il existe $x \in \mathbb{R}^n$ tel que $N_1(x) \neq N_2(x)$, par exemple $N_1(x) < N_2(x)$. Notons qu'un tel élément x est non nul. Soit $\lambda \in \mathbb{R}_+$ tel que $N_1(\lambda x) = 1$. On a $N_2(\lambda x) > 1$, donc $\lambda x \notin \{y \in \mathbb{R}^n, N_2(y) = 1\}$, cela contredit le fait que les deux normes aient la même boule unité.

24. (a) — Soit $\varphi : C \rightarrow \mathbb{R}_+$ définie par $\varphi(x) = \|a - x\|_E$. φ est continue sur le compact C donc, d'après le théorème de la borne atteinte de Weierstrass, il existe $x_a \in C$ tel que $\varphi(x_a) = \inf_{x \in C} \varphi(x) = \inf_{x \in C} \|a - x\|_E$.

— Comme $a \notin C$ et C est fermé, on a $\varphi(x) > 0$ pour tout $x \in C$. Il s'ensuit que $\varphi(x_a) = \|a - x_a\|_E > 0$.

(b) On note $m = \inf_{x \in C} \|a - x\|_E$. Supposons $x_0 \neq x_1$. Notons que, par convexité de C , $\frac{x_0 + x_1}{2} \in C$. On a :

$$m \leq \left\| a - \frac{x_0 + x_1}{2} \right\|_E = \frac{1}{2} \|(a - x_0) + (a - x_1)\|_E \leq \frac{1}{2} \|a - x_0\|_E + \frac{1}{2} \|a - x_1\|_E \leq m.$$

En particulier, l'inégalité triangulaire est une égalité. Comme la norme $\|\cdot\|_E$ est euclidienne, il existe $\lambda \in \mathbb{R}_+$ tel que $a - x_0 = \lambda(a - x_1)$. Comme $\|a - x_0\|_E = \|a - x_1\|_E$, on en déduit $\lambda = 1$, puis $x_0 = x_1$.

25. (a) — On peut prouver que f est une forme linéaire, donc H est une sous-espace affine car $H = f(a) + \vec{H}$ avec $\vec{H} = \{x \in E, f(x) = 0\}$.

— Les dimensions possibles pour H sont $n - 1$ ou n suivant que f soit nulle ou pas.

(b) On a

$$f(a) - f(\pi_C(a)) = \langle a - \pi_C(a), a \rangle_E - \langle a - \pi_C(a), \pi_C(a) \rangle_E = \|a - \pi_C(a)\|_E^2 \geq 0,$$

il s'ensuit que $f(\pi_C(a)) \leq f(a)$. Si $a \notin C$, $\pi_C(a) \neq a$, donc $f(\pi_C(a)) < f(a)$.

(c) Soit $x \in C$. Comme C est convexe, pour tout $t \in]0, 1]$, $(1 - t)\pi_C(a) + tx \in C$, donc

$$\|(1 - t)\pi_C(a) + tx - a\|_E^2 \geq \|\pi_C(a) - a\|_E^2.$$

En développant le carré des normes et en simplifiant par $t > 0$, on a

$$t\|x - \pi_C(a)\|_E^2 + 2\langle \pi_C(a) - a, x - \pi_C(a) \rangle_E \geq 0.$$

En faisant tendre t vers 0^+ , on en déduit que $\langle \pi_C(a) - a, x - \pi_C(a) \rangle_E \geq 0$, soit $f(x) \leq f(\pi_C(a))$.

(d) — Pour tout $x \in C$, on a :

$$\|a - x\|_E^2 - \|a - b\|_E^2 = \|(a - b) + (b - x)\|_E^2 - \|a - b\|_E^2.$$

En développant, on obtient :

$$\|a - x\|_E^2 - \|a - b\|_E^2 = 2\langle a - b, b - x \rangle + \|b - x\|_E^2 \geq 0$$

car cette dernière quantité est la somme de deux termes positifs.

— Par définition de $\pi_C(a)$ il s'ensuit que $b = \pi_C(a)$

26. (a) On a :

$$\begin{aligned} \|\pi_C(a') - \pi_C(a)\|_E^2 - \langle a' - a, \pi_C(a') - \pi_C(a) \rangle &= \langle a' - \pi_C(a'), \pi_C(a) - \pi_C(a') \rangle \\ &\quad + \langle a - \pi_C(a), \pi_C(a') - \pi_C(a) \rangle. \end{aligned}$$

D'après la question 25 (c), ces deux dernières quantités sont négatives.

(b) Il suffit d'utiliser l'inégalité de Cauchy-Schwarz dans l'inégalité de la question 26 (a).

27. (a) — Comme $a_p \notin C$ et que C est fermé, on en déduit que pour tout $p \in \mathbb{N}$, $a_p \neq \pi_C(a_p)$, donc la suite proposée est bien définie.

— On peut en extraire une sous-suite convergente par compacité de S^{n-1} .

(b) — y est non nulle car il est limite d'une sous-suite de vecteurs de norme 1.

— On note encore (par abus) $(a_p)_{p \in \mathbb{N}}$ la sous-suite convergente. D'après la question 25 (d), on a :

$$\forall p \in \mathbb{N}, \forall x \in C, \quad \langle a_p - \pi_C(a_p), x - \pi_C(a_p) \rangle_E \leq 0,$$

puis

$$\forall p \in \mathbb{N}, \forall x \in C, \quad \left\langle \frac{a_p - \pi_C(a_p)}{\|a_p - \pi_C(a_p)\|_E}, x - \pi_C(a_p) \right\rangle \leq 0.$$

En utilisant la continuité de π_C , celle du produit scalaire, on en déduit :

$$\forall x \in C, \quad \langle y, x - \pi_C(a) \rangle_E \leq 0.$$

Comme $a \in C$ (car $a \in \partial C$), on a $\pi_C(a) = a$.

28. Il suffit de prendre $A = \frac{1}{r^2} I_n \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.

29. (a) Soit $y \in \mathbb{R}^n$. On a :

$$\begin{aligned} y \in B^{-1}\mathcal{E}_A &\iff By \in \mathcal{E}_A \\ &\iff \langle AB y, By \rangle \leq 1 \\ &\iff \langle B^\top AB y, y \rangle \leq 1. \end{aligned}$$

La question 10 assurant que $B^\top AB \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$, donc $B^{-1}\mathcal{E}_A = \mathcal{E}_{B^\top AB}$ est un ellipsoïde.

(b) Soit $x \in \mathbb{R}^n$. On a :

$$\begin{aligned} x \in \mathcal{E}_A &\iff \langle Ax, x \rangle \leq 1 \\ &\iff \langle A^{1/2}x, A^{1/2}x \rangle \leq 1 \quad (\text{car } A^{1/2} \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})) \\ &\iff A^{1/2}x \in B_2^n \\ &\iff x \in A^{-1/2}(B_2^n) \quad (\text{car } x \mapsto A^{1/2}x \text{ est bijective}). \end{aligned}$$

Il s'ensuit que $\mathcal{E}_A = A^{-1/2}(B_2^n)$.

(c) — Comme B_2^n est convexe et l'application $x \mapsto A^{-1/2}x$ est linéaire, $\mathcal{E}_A = A^{-1/2}(B_2^n)$ est convexe.

— Comme l'application $x \mapsto A^{-1/2}x$ est continue et B_2^n compact, $\mathcal{E}_A$ est compact.

— Comme l'application $x \mapsto A^{-1/2}x$ est un homéomorphisme, l'image d'un ouvert est un ouvert. En particulier, $A^{-1/2}(B_2^n)$ contient un voisinage ouvert de 0.

Il s'ensuit que $\mathcal{E}_A$ est un corps convexe symétrique de $\mathbb{R}^n$.

(d) La jauge J_A est alors l'application $x \in \mathbb{R}^n \mapsto \sqrt{\langle Ax, x \rangle}$ (qui définit bien une norme car $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$) car $\mathcal{E}_A$ en est sa boule unité.

(e) La norme J_A est euclidienne car découle du produit scalaire $(x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \mapsto \langle Ax, y \rangle$ (rappelons que $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$). La matrice du produit scalaire dans la base canonique est alors la matrice A .

30. L'implication indirecte est immédiate. L'implication directe l'est tout autant car on a $J_A = J_B$, puis $A = B$.

31. On traite les deux implications.

($\Rightarrow$) Par définition de la jauge, on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, \quad J_B(x) \leq J_A(x),$$

ce qui permet de conclure.

($\Leftarrow$) Immédiat avec la jauge.

32. D'après la question 28, $\bar{B}(0, r) = \mathcal{E}_{\frac{1}{r^2}I_3}$, donc $\mu(\bar{B}(0, r)) = r^6$. On rappelle que le volume de $\bar{B}(0, r)$ est $\frac{4\pi r^3}{3}$.

33. Soit $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ telle que $\mathcal{E} = \mathcal{E}_A$. D'après la question 29 (a), $B^{-1}\mathcal{E} = B^{-1}\mathcal{E}_A = \mathcal{E}_{B^\top AB}$. Il s'ensuit que

$$\mu(B^{-1}\mathcal{E}) = \frac{1}{\det(B^\top AB)} = \frac{\mu(\mathcal{E})}{\det(B)^2}.$$

34. On note $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ et, rappelons-le, $\mathcal{F}$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$. Ces deux bases sont orthonormées pour le produit scalaire usuel. Soit $x \in \mathbb{R}^n$, on note $X_{\mathcal{B}}$ (resp. $X_{\mathcal{F}}$) la matrice des coordonnées de x dans la base $\mathcal{B}$ (resp. la base $\mathcal{F}$). On pose $D = \text{diag}(a_1, \dots, a_n)$ et P la matrice de passage de la base $\mathcal{B}$ vers la base $\mathcal{F}$; P est orthogonale car les deux bases sont orthonormées. On a :

$$\begin{aligned} x \in \mathcal{E} &\iff \langle DX_{\mathcal{B}}, X_{\mathcal{B}} \rangle \leq 1 \\ &\iff \langle DPX_{\mathcal{F}}, PX_{\mathcal{F}} \rangle \leq 1 \\ &\iff \langle P^\top DPX_{\mathcal{F}}, X_{\mathcal{F}} \rangle \leq 1. \end{aligned}$$

On pose $A = P^T D P \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$. Il s'ensuit que $\mathcal{E} = \{x \in \mathbb{R}^n, \langle Ax, x \rangle \leq 1\}$, donc $\mathcal{E}$ est un ellipsoïde de $\mathbb{R}^n$ et $\mu(\mathcal{E}) = \frac{1}{\det(A)} = \frac{1}{a_1 \times \dots \times a_n}$.

35. (a) Cela découle immédiatement du théorème spectral.

(b) Soit $V \in G_k$. D'après la formule de Grassmann, $V \cap \text{Vect}(f_k, \dots, f_n)$ n'est pas nul.

Soit $x \in V \cap \text{Vect}(f_k, \dots, f_n)$ un vecteur unitaire. On écrit $x = \sum_{i=k}^n x_i f_i$. On a donc

$$\langle Ax, x \rangle = \sum_{i=k}^n \lambda_i x_i^2 \leq \lambda_k. \text{ Il s'ensuit que } \min_{\substack{x \in V \\ \|x\|=1}} \langle Ax, x \rangle \leq \lambda_k \text{ (on note que le minimum}$$

est bien un minimum car la sphère unité de V est compacte). On en déduit que $\sup_{V \in G_k} \min_{\substack{x \in V \\ \|x\|=1}} \langle Ax, x \rangle \leq \lambda_k$. En prenant $V = \text{Vect}(f_1, \dots, f_k)$, on remarque que $\min_{\substack{x \in V \\ \|x\|=1}} \langle Ax, x \rangle =$

λ_k . Il s'ensuit que

$$\sup_{V \in G_k} \min_{\substack{x \in V \\ \|x\|=1}} \langle Ax, x \rangle = \max_{V \in G_k} \min_{\substack{x \in V \\ \|x\|=1}} \langle Ax, x \rangle = \lambda_k.$$

36. Soient A et B les matrices symétriques définies positives telles $\mathcal{E} = \mathcal{E}_A$ et $\mathcal{E}' = \mathcal{E}_B$. On définit sur $\mathbb{R}^n$ les applications f_A et f_B par :

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, \quad f_A(x) = \langle Ax, x \rangle \quad \text{et} \quad f_B(x) = \langle Bx, x \rangle.$$

On notera que f_A et f_B sont définies par $f_A = J_A^2$ et $f_B = J_B^2$. Soit $x_0 \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. On a

$$f_A \left(\frac{x_0}{\sqrt{f_A(x_0)}} \right) = 1, \text{ donc } \frac{x_0}{\sqrt{f_A(x_0)}} \in \mathcal{E}, \text{ puis } \frac{x_0}{\sqrt{f_A(x_0)}} \in \mathcal{E}'. \text{ On a donc}$$

$$f_B \left(\frac{x_0}{\sqrt{f_A(x_0)}} \right) = \frac{f_B(x_0)}{f_A(x_0)} \leq 1.$$

On en déduit que $f_B(x_0) \leq f_A(x_0)$. Cette inégalité reste vraie pour $x_0 = 0$.

On note $\lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_n$ les valeurs propres de A et $\lambda'_1 \geq \dots \geq \lambda'_n$ celles de B . Soit $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$. On en déduit que

$$\max_{V \in G_k} \min_{\substack{x \in V \\ \|x\|=1}} \langle Bx, x \rangle \leq \max_{V \in G_k} \min_{\substack{x \in V \\ \|x\|=1}} \langle Ax, x \rangle,$$

soit $\lambda'_k \leq \lambda_k$. Il s'ensuit que $\det(B) \leq \det(A)$ puis, par définition, $\mu(\mathcal{E}') \geq \mu(\mathcal{E})$.

37. Comme C est un compact, C est borné, donc est inclus dans une boule fermée centrée en 0 et de rayon $R > 0$. Le résultat de la question 28 montre que la boule fermée de centre 0 et de rayon $R > 0$ est un ellipsoïde. Il suffit de poser $\mathcal{E}' = \overline{B}(0, R)$.

38. — Comme $0 \in \mathring{C}$, il existe $r > 0$ tel que $\overline{B}(0, r) \subset C$. D'après la question 28, $\overline{B}(0, r)$ est un ellipsoïde de C et est inclus, donc $\mathcal{A}$ est non vide.

— D'après la question 37, il existe $R > 0$ tel que $C \subset \overline{B}(0, R)$. Ainsi, si $\mathcal{E}$ est un ellipsoïde inclus dans C , on a $\mathcal{E} \subset \overline{B}(0, R)$, puis d'après la question 36, $\mu(\mathcal{E}) \leq \mu(\overline{B}(0, R))$, donc $\mathcal{A}$ est majoré.

— $\mathcal{A}$ est non vide et majoré, il admet une borne supérieure.

39. Par la caractérisation de la borne supérieure, il existe une suite d'ellipsoïdes $(\mathcal{E}_p)_{p \in \mathbb{N}^*}$ de $\mathcal{A}$ (donc $\mathcal{E}_p \subset C$ pour tout $p \in \mathbb{N}^*$) telle que $\lim_{p \rightarrow +\infty} \mu(\mathcal{E}_p) = \alpha$. Par définition d'un ellipsoïde, il existe une suite $(A_p)_{p \in \mathbb{N}^*}$ d'éléments de $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ avec A_p définissant $\mathcal{E}_p$ pour tout $p \in \mathbb{N}^*$.

40. Notons que $N(A)$ est bien définie car l'application $x \in S^{n-1} \mapsto |\langle Ax, x \rangle|$ est continue sur le compact S^{n-1} .

— L'homogénéité et la positivité sont clairs.

— Soient A et B dans $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. Pour tout $x \in S^{n-1}$, on a :

$$\begin{aligned} |\langle (A+B)(x), x \rangle| &= |\langle Ax, x \rangle + \langle Bx, x \rangle| \\ &\leq |\langle Ax, x \rangle| + |\langle Bx, x \rangle| \\ &\leq N(A) + N(B). \end{aligned}$$

En passant à la borne supérieure, on en déduit que $N(A+B) \leq N(A) + N(B)$.

— Soit $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ telle que $N(A) = 0$. On a donc pour tout $x \in S^{n-1}$, $\langle Ax, x \rangle = 0$. Comme A est symétrique, il s'ensuit que $A = 0$.

On a montré que N est une norme sur $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$.

41. — Par définition de la mesure, on a $\lim_{p \rightarrow +\infty} \frac{1}{\lambda_1(p) \times \dots \times \lambda_n(p)} = \alpha$, puis $\lim_{p \rightarrow +\infty} \lambda_1(p) \times \dots \times \lambda_n(p) = \frac{1}{\alpha}$.

— Si la suite $(\lambda_1(p))_{p \in \mathbb{N}^*}$ n'était pas minorée par un réel strictement positif, il existerait une fonction $\varphi : \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{N}^*$ strictement croissante telle que $\lim_{p \rightarrow +\infty} \lambda_1(\varphi(p)) = 0$.

En introduisant, pour $p \in \mathbb{N}^*$, $(e_1(p), \dots, e_n(p))$ une base orthonormée de vecteurs propres associés aux valeurs propres $\lambda_1(p), \dots, \lambda_n(p)$, on a :

$$\forall p \in \mathbb{N}^*, \quad \mathcal{E}_p = \left\{ \sum_{i=1}^n x_i e_i(p) \in \mathbb{R}^n, \sum_{i=1}^n \lambda_i(p) x_i^2 \leq 1 \right\}.$$

Il s'ensuit que pour $p \in \mathbb{N}^*$, $\frac{1}{\sqrt{\lambda_1(\varphi(p))}} e_1((\varphi(p))) \in \mathcal{E}_{\varphi(p)} \subset C$.

Or, $\lim_{p \rightarrow +\infty} \left\| \frac{1}{\sqrt{\lambda_1(\varphi(p))}} e_1((\varphi(p))) \right\| = +\infty$, ce qui donne une contradiction car C est

borné. On en déduit donc que la suite $(\lambda_1(p))_{p \in \mathbb{N}^*}$ est minorée par un réel strictement positif.

— On note $\eta > 0$ tel que pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, $\lambda_1(p) \geq \eta$. De l'égalité $\lambda_1(p) \times \dots \times \lambda_n(p) = \det(A_p)$, on en déduit

$$\forall p \in \mathbb{N}^*, \quad \lambda_n(p) \leq \frac{\eta^{n-1}}{\det(A_p)}.$$

Or, la suite $(\det(A_p))_{p \in \mathbb{N}^*}$ converge vers un réel strictement positif, donc est majorée : il s'ensuit que la suite $(\lambda_n(p))_{p \in \mathbb{N}^*}$ est majorée.

42. Soit $p \in \mathbb{N}^*$. Soit $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i(p)$ de norme 1. On a $|\langle A_p x, x \rangle| = \sum_{i=1}^n x_i^2 \lambda_i(p) \leq M$, où M est majorant de la suite $(\lambda_n(p))_{p \in \mathbb{N}^*}$. En utilisant la norme de la question 40, on en déduit que

$$\forall p \in \mathbb{N}^*, \quad N(A_p) \leq M.$$

43. La suite $(A_p)_{p \in \mathbb{N}^*}$ est donc une suite bornée de $\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$. On peut en extraire une sous-suite, disons $(A_{\varphi(p)})_{p \in \mathbb{N}^*}$, qui converge vers A . Comme $\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ est fermé (question 12), $A \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$.

44. Comme pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, $\det(A_p) = \lambda_1(p) \times \dots \times \lambda_n(p) \geq \lambda_1(p)^n \geq m^n > 0$ (m est un minorant de la suite $(\lambda_1(p))_{p \in \mathbb{N}^*}$), par continuité du déterminant, on en déduit que :

$$\lim_{p \rightarrow +\infty} \det(A_{\varphi(p)}) = \det(A) \geq m^n > 0.$$

En particulier, $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.

45. Il reste à montrer que $\mu(\mathcal{E}_A) = \alpha$ et $\mathcal{E}_A \subset C$.

- Par continuité de $\det$, on a $\lim_{p \rightarrow +\infty} \det(A_{\varphi(p)}) = \det(A) = \frac{1}{\alpha}$, puis $\mu(\mathcal{E}) = \alpha$.
- On note J_C la jauge de C . Soit $x \in \mathbb{R}^n$. Comme $\mathcal{E}_p \subset C$ pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, on a

$$\forall p \in \mathbb{N}^*, \quad \langle A_p x, x \rangle \geq J_C(x)^2.$$

Comme $\lim_{p \rightarrow +\infty} A_{\varphi(p)} = A$ et par continuité du produit scalaire, il s'ensuit que $\lim_{p \rightarrow +\infty} \langle A_{\varphi(p)} x, x \rangle = \langle Ax, x \rangle$, soit $\langle Ax, x \rangle \geq J_C(x)^2$. On en déduit donc que $\mathcal{E} \subset C$.

46. On remarque que f est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f''(x) = \frac{e^x}{(1 + e^x)^2} > 0,$$

il s'ensuit que f est strictement convexe sur $\mathbb{R}$.

47. — Comme $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ et en notant $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ ses valeurs propres, on a

$$\det^{1/n}(I_n + A) = \prod_{i=1}^n (1 + \lambda_i)^{1/n} = \prod_{i=1}^n (1 + e^{\mu_i})^{1/n} = \exp\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f(\mu_i)\right),$$

où, pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $\lambda_i = e^{\mu_i}$. Comme f est convexe, l'inégalité de Jensen et la croissance de $\exp$ donnent alors

$$\det^{1/n}(I_n + A) \geq \exp\left(f\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mu_i\right)\right) = 1 + \exp\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mu_i\right) = 1 + \det^{1/n}(A).$$

— On traite les deux implications.

($\Rightarrow$) Si l'inégalité est une égalité, alors l'inégalité de Jensen est une égalité. Comme f est strictement convexe, on en déduit que pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $\mu_i = \mu$. Il s'ensuit que $A = e^{\mu} I_n$.

($\Leftarrow$) Il est clair que si $A = \lambda I_n$ avec $\lambda > 0$ alors l'inégalité est une égalité.

48. — Pour $A, B \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$, on a :

$$\det^{1/n}(A + B) = \det^{1/n}(A) \det^{1/n}(I_n + A^{-1/2} B A^{-1/2}).$$

Notons que $A^{-1/2} B A^{-1/2} \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ d'après la question 10. La question 47 donne alors :

$$\det^{1/n}(A + B) \geq \det^{1/n}(A) \left(1 + \det^{1/n}(A^{-1/2} B A^{-1/2})\right).$$

Il suffit de développer pour conclure.

— D'après la question précédente, l'inégalité $\det^{1/n}(I_n + D) \geq 1 + \det^{1/n}(D)$ est une égalité si, et seulement si, il existe $\lambda > 0$ tel que $D = \lambda I_n$, ce qui est équivalent à $B = \lambda A$.

49. Soient A et B dans $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.

— D'après la question 48, en utilisant l'inégalité arithmético-géométrique et l'homogénéité du déterminant :

$$\det^{1/n}\left(\frac{A+B}{2}\right) \geq \frac{1}{2} \det^{1/n}(A) + \frac{1}{2} \det^{1/n}(B) \geq \sqrt{\det^{1/n}(A) \det^{1/n}(B)}.$$

On conclut en élevant à la puissance n .

— Soient A et B qui réalisent l'égalité. En particulier, les matrices $\frac{1}{2}A$ et $\frac{1}{2}B$ réalisent l'égalité dans l'inégalité de la question 34. La question 34 assure qu'il existe $\lambda > 0$ tel que $B = \lambda A$. L'inégalité arithmético-géométrique est une égalité si, et seulement si les nombres sont égaux, donc $\det(A) = \det(B)$. Il s'ensuit que $A = B$. Réciproquement, si $A = B$, alors l'inégalité est une égalité.

50. Supposons qu'il existe deux ellipsoïdes $\mathcal{E}_1$ et $\mathcal{E}_2$ inclus dans C de mesure maximale. On note A_1 et A_2 les matrices de $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ telles $\mathcal{E}_1 = \mathcal{E}_{A_1}$ et $\mathcal{E}_2 = \mathcal{E}_{A_2}$. On suppose évidemment que $A_1 \neq A_2$. On pose $A = \frac{A_1^{-1/2} + A_2^{-1/2}}{2} \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ (car $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ est convexe d'après la question 11 de l'exercice préliminaire).

On pose $\mathcal{E}_A = A(B_2^n)$. D'après la question 29 (b), on a $\mathcal{E}_1 = A_1^{-1/2}(B_2^n)$ et $\mathcal{E}_2 = A_2^{-1/2}(B_2^n)$, donc par convexité de C , on a $A(B_2^n) \subset C$, donc $\mathcal{E}_A$ est un ellipsoïde inclus dans C . La question 33 donne $\mu(\mathcal{E}_A) = \det(A)^2 = \det(A)^2$. De plus,

$$\mu(\mathcal{E}_A) = \det(A)^2 = \det\left(\frac{A_1^{-1/2} + A_2^{-1/2}}{2}\right) > \sqrt{\det(A_1^{-1/2}) \det(A_2^{-1/2})} = \frac{1}{\det(A_1)} = \text{vol}(\mathcal{E}_1),$$

car les matrices $A_1^{-1/2}$ et $A_2^{-1/2}$ sont différentes. Cela contredit le fait que $\mathcal{E}_1$ est de mesure maximale.

51. (a) On remarque que $\frac{1}{\|u\|^2}\psi_u$ est un projecteur de rang 1 sur $\text{Vect}(u)$, donc $\text{Ker}(\psi_u) = \{u\}^\perp$ et $\text{Im}(\psi_u) = \text{Vect}(u)$. En particulier, $\dim(\text{Ker}(\psi_u)) = n - 1$.
 (b) Les projecteurs sont diagonalisables et $\text{Sp}(\psi_u) = \{0, \|u\|^2\}$.
 (c) Comme $\frac{1}{\|u\|^2}\psi_u$ est un projecteur de rang 1, sa trace vaut 1, donc celle de ψ_u est $\|u\|^2$.
 (d) On note $(e_1, \dots, e_n)$ la base canonique $\mathcal{F}$ de $\mathbb{R}^n$. On écrit $u = \sum_{i=1}^n u_i e_i$. On a :

$$\forall j \in \llbracket 1, n \rrbracket, \quad \psi_u(e_j) = \langle u, e_j \rangle u = u_j u.$$

Il s'ensuit que la matrice de ψ_u dans la base $\mathcal{F}$ est $uu^\top$.

52. (a) On prouve H est un hyperplan affine de $\mathbb{R}^n$ en remarquant que pour tout vecteur non nul y il existe une famille indépendante de $n - 1$ vecteurs non nuls orthogonaux à y . De plus, $H \cap S^{n-1} \neq \emptyset$ et, comme $S^{n-1} \subset C$, on a :

$$\forall y \in S^{n-1}, \quad \langle y, x - v \rangle \leq 1,$$

donc H est tangent à S^{n-1} .

- (b) H est un hyperplan affine, donc sépare $\mathbb{R}^n$ en deux demi-espaces dont l'un d'eux contient S^{n-1} et C . Il est facile de remarquer que $H_v = \{x \in \mathbb{R}^n, \langle x, v \rangle = 1\}$ est également tangent à S^{n-1} en v . Par unicité, on en déduit que $H = H_v$, puis l'inégalité : pour tout $x \in C$, $\langle x, v \rangle \leq 1$.
 53. (a) Soit $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ telle que $\mathcal{E} = \mathcal{E}_A$. Soit $(e_1, \dots, e_n)$ une base orthonormée de vecteurs propres de A associés aux valeurs propres $\lambda_1, \dots, \lambda_n$. Soit $x \in \mathbb{R}^n$, on écrit :

$$x = \sum_{i=1}^n x_i e_i \in \mathbb{R}^n. \text{ On a :}$$

$$x \in \mathcal{E} \iff \langle Ax, x \rangle \leq 1 \iff \sum_{j=1}^n \lambda_j x_j^2 \leq 1 \iff \sum_{j=1}^n \lambda_j \langle x, e_j \rangle^2 \leq 1.$$

Comme les λ_j sont strictement positifs, il suffit de poser $\alpha_j = \frac{1}{\sqrt{\lambda_j}}$.

(b) En utilisant la question 34, on a $\mu(\mathcal{E}) = \prod_{j=1}^n \alpha_j^2$.

(c) Soit $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ tel que $\sum_{j=1}^n \frac{x_j^2}{\alpha_j^2} = 1$ (on notera que par définition $(x_1, \dots, x_n) \in \mathcal{E}$) et tel que les vecteurs $\left(\frac{x_1}{\alpha_1}, \dots, \frac{x_n}{\alpha_n}\right)$ et $(\alpha_1 v_1, \dots, \alpha_n v_n)$ soient colinéaires. L'inégalité de Cauchy-Schwarz, qui est alors une égalité, donne

$$\sum_{j=1}^n x_j v_j = \sqrt{\sum_{j=1}^n \frac{x_j^2}{\alpha_j^2}} \sqrt{\sum_{j=1}^n \alpha_j^2 v_j^2} = \sqrt{\sum_{j=1}^n \alpha_j^2 v_j^2}.$$

Comme $(x_1, \dots, x_n) \in \mathcal{E} \subset C$, d'après la question 52 (b), on a :

$$\langle x, v \rangle = \sum_{j=1}^n x_j v_j \leq 1.$$

On en déduit que $\sqrt{\sum_{j=1}^n \alpha_j^2 v_j^2} \leq 1$.

(d) Pour tout $i \in \llbracket 1, m \rrbracket$, ψ_{u_i} est un projecteur de rang 1, donc $\text{Tr}(\psi_{u_i}) = 1$. Par linéarité de la trace, il s'ensuit que

$$n = \text{Tr}(\text{id}_{\mathbb{R}^n}) = \sum_{i=1}^m c_i \text{Tr}(\psi_{u_i}) = \sum_{i=1}^m c_i.$$

(e) On a :

$$\|x\|^2 = \langle x, x \rangle = \left\langle x, \sum_{i=1}^m c_i \langle x, u_i \rangle u_i \right\rangle = \sum_{i=1}^m c_i \langle x, u_i \rangle^2.$$

(f) D'après la question 53 (c), pour tout $i \in \llbracket 1, m \rrbracket$, on a $\sum_{j=1}^n \alpha_j^2 \langle u_i, e_j \rangle^2 \leq 1$. Or, $\sum_{i=1}^m c_i = n$,

on en déduit donc $\sum_{i=1}^m \left(c_i \sum_{j=1}^n \alpha_j^2 \langle u_i, e_j \rangle^2 \right) \leq n$.

(g) En permutant les deux sommes, on a $\sum_{j=1}^n \alpha_j^2 \left(\sum_{i=1}^m c_i \langle u_i, e_j \rangle^2 \right) \leq n$. Or, d'après la question 53 (e), $\sum_{i=1}^m c_i \langle u_i, e_j \rangle^2 = \|e_j\|^2 = 1$, ainsi $\sum_{j=1}^n \alpha_j^2 \leq n$. L'inégalité arithmético-géométrique donne

$$\left(\prod_{j=1}^n \alpha_j^2 \right)^{1/n} \leq \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \alpha_j^2 \leq 1,$$

ce qui permet de conclure.

- (h) On en déduit que tout ellipsoïde inclus dans C a une mesure inférieure ou égale à 1. Ceci est donc également vrai pour l'ellipsoïde de mesure maximale. Or, $B_2^n \subset C$ et $\mu(B_2^n) = 1$. Par unicité, on en déduit que B_2^n est l'ellipsoïde de mesure maximale inclus dans C .
54. — Puisque S^{n-1} est borné alors X aussi.
 — On note J_C la jauge du corps convexe symétrique C . Comme $\partial C = \{x \in \mathbb{R}^n, J_C(x) = 1\}$, on en déduit que $X = S^{n-1} \cap J_C^{-1}(\{1\})$. Il s'ensuit que X est fermé comme l'intersection de deux fermés.
 — Supposons que $X = \emptyset$. En particulier, pour tout $x \in S^{n-1}$, $J_C(x) < 1$. Par compacité de S^{n-1} et par continuité de J_C , il existe $r \in [0, 1[$ tel que pour tout $x \in S^{n-1}$, $J_C(x) \leq r < 1$.
 Il s'ensuit que pour tout $x \in S^{n-1}$, $J_C\left(\frac{1}{r}x\right) \leq 1$. On en déduit donc que $\bar{B}\left(0, \frac{1}{r}\right) \subset C$. D'après la question 36, $\mu\left(\bar{B}\left(0, \frac{1}{r}\right)\right) > \mu(B_2^n)$, ce qui contredit le fait que B_2^n est l'ellipsoïde de mesure maximale.
55. D'après la question 51 (d), la matrice de ψ_u dans la base $\mathcal{F}$ est symétrique, donc $\text{conv}(T) \subset \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$.
56. On a vu à la question 51 (c) que, si $M \in T$, $\text{Tr}(M) = 1$. Cela reste en particulier vrai pour les combinaisons convexes d'éléments de T .
57. (a) On reprend les notations de la question 25. On pose $a = \frac{1}{n}I_n \notin \text{conv}(T)$. Comme $\text{conv}(T)$ est un convexe compact de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, d'après les questions 25 (b) et 25 (c), on a :

$$\forall M \in \text{conv}(T), \quad f(M) < f\left(\frac{1}{n}I_n\right).$$

Il suffit de remplacer f par $-f$ pour conclure.

(b) Soit l'application $\varphi : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^*$.

$$H \longmapsto (\psi_H : M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \longmapsto \text{Tr}(HM))$$

- La linéarité de φ suit de la linéarité de la trace.
 — Soit $H \in \text{Ker}(\varphi)$: pour tout $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on a $\phi_H(M) = \text{Tr}(HM) = 0$. En particulier, pour $M = H^\top$, en utilisant la question 8 de l'exercice préliminaire, on a $H = 0$. φ est injective.
 — Comme $\dim(\mathcal{M}_n(\mathbb{R})) = \dim(\mathcal{M}_n(\mathbb{R})^*)$, φ est un isomorphisme. L'existence et l'unicité d'une telle matrice H en découle.
58. Soit $u \in \partial C \cap S^{n-1}$. D'après la question 51 (d), la matrice de ψ_u est alors $uu^\top$. Comme H est de trace nulle, $f(I_n) = 0$, ainsi $\text{Tr}(Huu^\top) > 0$. Un simple calcul montre que $\text{Tr}(Huu^\top) = u^\top Hu = \langle Hu, u \rangle$, ce qui permet de conclure.
59. — Il est clair que pour tout $\delta > 0$, $I_n + \delta H \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. De plus, comme $H \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$, il existe P orthogonale et $D = \text{diag}(d_1, \dots, d_n)$ telles que $H = PDP^\top$. On a donc $I_n + \delta H = P \text{diag}(1 + \alpha d_1, \dots, 1 + \alpha d_n) P^\top$. On choisit $\alpha > 0$ tel que pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ et pour tout $\delta \in]0, \alpha[$, $0 < 1 + \delta d_i$. Il s'ensuit que pour tout $\delta \in]0, \alpha[$, $I_n + \delta H \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.
 — Par définition, pour tout $\delta \in]0, \alpha[$, $\mu(\mathcal{E}_\delta) = \frac{1}{\det(I_n + \delta H)}$.
60. (a) — Soit $u \in \partial C$. Soit $\delta \in]0, \alpha[$.
 — Si $u \in \partial C \cap S^{n-1}$. On a

$$\langle (I_n + \delta H)u, u \rangle = \|u\|^2 + \delta \langle Hu, u \rangle > 1 \quad (1)$$

car $\|u\| = 1$ et car $\langle Hu, u \rangle > 0$ (question 58). L'application $x \in \mathbb{R}^n \longmapsto \langle Hx, x \rangle$ est continue, l'inégalité (1) reste vraie sur un voisinage ouvert $\mathcal{V}_u$ de u dans $\mathbb{R}^n$.

— Si $u \notin S^{n-1}$. On a

$$\langle (I_n + \delta H) u, u \rangle = \|u\|^2 + \delta \langle Hu, u \rangle.$$

Mais $u \notin S^{n-1}$, on a donc $\|u\|^2 > 1$ car $B_n^2 \subset C$. Comme $\lim_{\delta \rightarrow 0} \delta \langle Hu, u \rangle = 0$, il existe $\eta_u \in]0, \alpha[$ tel que pour tout $\delta \in]0, \eta_u[$, $\|u\|^2 + \delta \langle Hu, u \rangle > 1$. Par continuité de $x \in \mathbb{R}^n \mapsto \langle Hx, x \rangle$, l'inégalité

$$\langle (I_n + \delta H) u, u \rangle = \|u\|^2 + \delta \langle Hu, u \rangle > 1 \quad (2)$$

est donc vraie sur un voisinage ouvert $\mathcal{V}_u$ de u dans $\mathbb{R}^n$.

— Comme $\partial C = \bigcup_{u \in \partial C} (\mathcal{V}_u \cap \partial C)$ et ∂C est compact, la propriété admise assure qu'il

existe un nombre fini de points $u_1, \dots, u_m$ de ∂C tels que $\partial C = \bigcup_{i=1}^m (\mathcal{V}_{u_i} \cap \partial C)$.

On suppose, par exemple que, $u_1, \dots, u_r$ appartiennent à S^{n-1} et $u_{r+1}, \dots, u_m$ appartiennent à $\partial C \setminus S^{n-1}$.

On pose $\eta = \min \{\eta_{r+1}, \dots, \eta_m\}$, avec la convention que $\eta = +\infty$ si l'ensemble $\{u_{r+1}, \dots, u_m\}$ est vide. Par construction, pour tout $u \in \partial C$, pour tout $\delta \in]0, \eta[$, on a $\langle (I_n + \delta H) u, u \rangle > 1$.

(b) Soit $\delta \in]0, \eta[$. Soit J_C la jauge du corps convexe symétrique C et $\|\cdot\|_{\mathcal{E}_\delta}$ celle de $\mathcal{E}_\delta$. Soit $x \in \mathcal{E}_\delta \setminus \{0\}$. Soit $x' = \frac{x}{J_C(x)}$; on a $J_C(x') = 1$, donc d'après la question 22 (c), $x' \in \partial C$.

La question 60 (a) assure alors que $\|x'\|_{\mathcal{E}_\delta} > 1$. Par homogénéité, on a $\|x\|_{\mathcal{E}_\delta} > J_C(x)$. Comme $x \in \mathcal{E}_\delta$, on a $\|x\|_{\mathcal{E}_\delta} \leq 1$ (question 22 (b)), donc $J_C(x) \leq 1$, donc $x \in C$ (question 22 (b)).

61. Soit $\delta \in]0, \eta[$. La question 59 assure que $\mu(\mathcal{E}_\delta) = \frac{1}{\det(I_n + \delta H)}$. On note $\mu_1, \dots, \mu_n$ les valeurs propres de H . L'inégalité arithmético-géométrique donne :

$$\det^{1/n}(I_n + \delta H) = \prod_{i=1}^n (1 + \delta \mu_i)^{1/n} \leq \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (1 + \delta \mu_i) = 1$$

car $\sum_{i=1}^n \mu_i = \text{Tr}(H) = 0$. On en déduit que $\mu(\mathcal{E}_\delta) \geq 1$. Mais B_2^n est l'ellipsoïde de mesure maximale (de mesure 1). Il s'ensuit donc que pour tout $\delta \in]0, \eta[$, $\mu(\mathcal{E}_\delta) = 1$. Cela signifie donc qu'il y a égalité dans l'inégalité arithmético-géométrique, donc $1 + \delta \mu_1 = \dots = 1 + \delta \mu_n$ pour tout $\delta \in]0, \eta[$, soit $\mu_1 = \dots = \mu_n$. Comme $\sum_{i=1}^n \mu_i = \text{Tr}(H) = 0$, on en déduit que $\mu_1 = \dots = \mu_n = 0$, autrement dit $H = 0$. Mais si $H = 0$, l'inégalité : pour tout $M \in \text{conv}(T)$, $f(M) > f\left(\frac{1}{n}I_n\right)$ ne peut pas être vraie, ce qui donne une contradiction.

On en déduit donc que $\frac{1}{n}I_n \in \text{conv}(T)$, ce que l'on veut prouver.

62. — L'inclusion $B_2^n \subset C$ est claire.

— Soit $x \in C$. D'après la question 53 (e), on a $\|x\|^2 = \sum_{i=1}^m c_i \langle x, u_i \rangle^2$. Or, d'après la question 52 (b), on a $\langle x, u_i \rangle \leq 1$ pour tout $i \in \llbracket 1, m \rrbracket$. Comme C est symétrique (quitte à considérer $-x$), on a $|\langle x, u_i \rangle| \leq 1$. On conclut en utilisant la question 53 (d).

63. On note $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ telle que $\mathcal{E} = \mathcal{E}_A$. D'après la question 29 (b), on a $\mathcal{E} = A^{-1/2}(B_2^n)$. Ainsi, cela revient à prouver que $A^{-1/2}(B_2^n) \subset C \subset \sqrt{n}A^{-1/2}(B_2^n)$, soit en composant par la matrice $A^{1/2}$, $B_2^n \subset A^{1/2}(C) \subset \sqrt{n}B_2^n$.

On pose $C' = A^{1/2}(C)$. On constate que C' est un corps convexe symétrique de $\mathbb{R}^n$. Les inclusions $B_2^n \subset A^{1/2}(C) \subset \sqrt{n}B_2^n$ sont vraies si B_2^n est l'ellipsoïde de mesure maximale inclus dans C' , la question 62 permettant de conclure.

Supposons que B_2^n ne soit pas l'ellipsoïde de mesure maximale inclus dans C' : il existe un ellipsoïde $\mathcal{E}'$ tel que $\mu(\mathcal{E}') > \mu(B_2^n)$ et $\mathcal{E}' \subset C'$. Il s'ensuit que $A^{-1/2}(\mathcal{E}') \subset A^{-1/2}(C') = C$. Or, d'après la question 33, $\mu(A^{-1/2}(\mathcal{E}')) = \mu((A^{1/2})^{-1}(\mathcal{E}')) = \frac{\mu(\mathcal{E}')}{\det(A)}$ et $\mu(\mathcal{E}) = \mu(A^{-1/2}(B_2^n)) = \frac{\mu(B_2^n)}{\det(A)}$.

On en déduit donc que $\mu(A^{-1/2}(\mathcal{E}')) > \mu(B_2^n)$, cela contredit le fait que B_2^n soit l'ellipsoïde de mesure maximale inclus dans C et conclut la question.

64. Il est clair que C est convexe et symétrique puisque C est la boule unité pour la norme $\|\cdot\|_\infty$ de $\mathbb{R}^n$; de plus, d'après la question 16, C est un corps convexe de $\mathbb{R}^n$.
65. On note $(e_1, \dots, e_n)$ la base canonique $\mathcal{F}$ de $\mathbb{R}^n$. On a :

$$E\left(\|(X_1, \dots, X_n)\|_{\mathcal{E}}^2\right) = \sum_{1 \leq i, j \leq n} E(X_i X_j) \langle e_i, e_j \rangle_{\mathcal{E}}.$$

Or, pour tout $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$, on a $E(X_i X_j) = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$, il s'ensuit que

$$E\left(\|(X_1, \dots, X_n)\|_{\mathcal{E}}^2\right) = \sum_{i=1}^n \|e_i\|_{\mathcal{E}}^2.$$

Or, $\mathcal{E} \subset [-1, 1]^n$, donc $\|x\|_{\mathcal{E}} \geq \|x\|_\infty$. Mais, pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $\|e_i\|_\infty = 1$, ce qui permet de conclure.

66. Soit $\mathcal{E}$ l'ellipsoïde de mesure maximale inclus dans C . Supposons qu'il existe une constante $\alpha_n \in [1, \sqrt{n}[$ telle que $\mathcal{E} \subset C \subset \alpha_n \mathcal{E}$.

D'après la question précédente, il existe $\omega \in \Omega$ tel que $\|(X_1(\omega), \dots, X_n(\omega))\|_{\mathcal{E}} \geq \sqrt{n}$, de sorte que $(X_1(\omega), \dots, X_n(\omega)) \notin \alpha_n \mathcal{E}$ car $\alpha_n \mathcal{E}$ est la boule unité fermée pour la norme $\|\cdot\|_{\mathcal{E}}$. Comme $(X_1(\omega), \dots, X_n(\omega)) \in C$, on en déduit une contradiction.