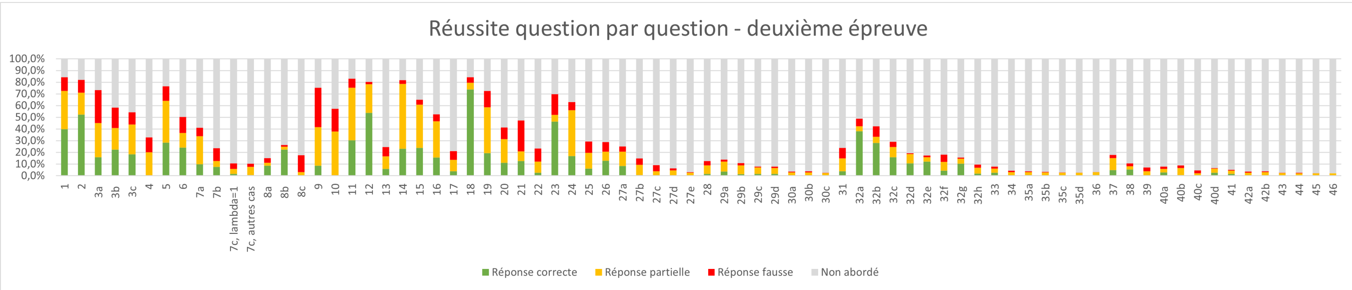
Des éléments de correction sont également téléchargeables sur ce site, à l'adresse.
`https://interne.agreg.org/data/uploads/rapports/corrige_ep2_2024.pdf`.
Ces éléments de correction ne prétendent aucunement être exhaustifs.

2.2.1 Statistiques de réussite

Le graphique suivant indique les réussites aux différentes questions. Pour chacune d'elle, la zone verte indique le pourcentage de candidats ayant fourni une bonne réponse, la zone orange représente le pourcentage de ceux ayant proposé une réponse partiellement juste, la zone rouge correspond aux réponses erronées.



2.2.2 Analyse de l'épreuve et commentaires par questions

le sujet de cette épreuve portait sur le problème du collectionneur. Il comportait deux exercices préliminaires indépendants (résolution d'une équation fonctionnelle, étude de la fonction définie par $g_n(x) = \mathrm{e}^{-x} \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}$ en s'appuyant sur des notions de probabilités), quatre résultats préliminaires classiques réutilisés par la suite du problème (quelques résultats sur la fonction Γ, l'inégalité de Hölder-Minkowski, un asymptote des sommes harmoniques, le problème de Bâle, résolu à l'aide de séries de Fourier) et le problème lui-même. Après l'établissement de certaines lois de probabilités liées au problème, on établissait le théorème de Bohr-Mollerup, puis le problème se tournait vers la notion de fonction caractéristique, calculait celle de la loi de Gumbel et établissait un théorème de convergence vers cette loi.

Il est notable que dans la plupart des copies, les démonstrations par récurrence sont rédigées tout à fait proprement. Beaucoup de candidats ont manifesté de solides compétences en calcul, par exemple dans l'exercice sur l'inégalité de Hölder-Minkowski ou les question 32 (c) et suivantes. La majorité des candidats fait preuve d'une certaine honnêteté intellectuelle, sans tentative de « bluff ».

Parmi les erreurs régulièrement rencontrées, on trouve les manipulations d'intégrale impropre avant de vérifier son existence : on écrit par exemple que $\int_0^{\infty} f(t)\mathrm{d}t \leqslant \int_0^{\infty} g(t)\mathrm{d}t$ et donc $\int_0^{\infty} f(t)\mathrm{d}t$ existe car g est intégrable sur $[0; +\infty[$, plutôt que montrer que $|f(t)| \leqslant |g(t)|$ sur l'intervalle $[0; +\infty[$. On rencontre également des confusions entre intégrale dépendant d'un paramètre et intégrale fonction de sa borne supérieure. Voici quelques autres erreurs régulièrement rencontrées :

- si f est décroissante et $f(x) \leqslant f(y)$, alors $y \leqslant x$. C'est faux : il suffit de penser à une fonction constante. Certains candidats ont aussi fait une erreur de ce type dans la question 15.
- Deux suites qui convergent vers la même limite ne sont pas nécessairement équivalentes, par exemple $\left(\frac{1}{n}\right)_{n\geqslant 1}$ et $\left(\frac{1}{n^2}\right)_{n\geqslant 1}$.
- Une suite bornée n'est pas toujours convergente.
- Une suite encadrée entre deux suites convergentes ne converge pas toujours.

— Ce n'est pas non plus parce qu''une suite est minorée par une suite convergeant vers 0, que la suite dominante est à termes positifs.
— Deux suites équivalentes ne sont pas nécessairement convergentes. Leur différence ne converge pas non plus nécessairement vers 0.

Passons maintenant en revue certaines questions du sujet.

1. Certains candidats ont passé du temps à prouver l'unicité alors qu'ils avaient déjà raisonné par analyse-synthèse. D'autres ont obtenu l'expression de $P(f)$ et de $I(f)$ dans la question 2 sans réaliser qu'il avaient une réponse au moins partielle à la question 1.

2. Il convenait de faire attention aux objets : écrire $P'(f)$ n'a pas de sens, par exemple. Il était attendu un minimum de rigueur sur la justification de la dérivabilité des fonctions $P(f)$ et $I(f)$ et notamment sur une citation correcte des fonctions et de l'enchaînement des opérations qui les ont généré.

3. (a). Nombreux sont ceux qui ont essayé, en vain, d'appliquer le théorème de dérivation sous le signe intégral. La difficulté provenait du fait que la variable apparait à la fois dans la borne de l'intégrale et dans l'intégrande : il convient donc de développer l'expression avant de pouvoir dériver. Il n'était pas utile de procéder à un changement de variables pour dériver des primitives de fonctions exprimées sous forme intégrale.

4. La résolution d'une équation différentielle linéaire d'ordre 2 dont l'équation caractéristique n'a pas de racines réelles a parfois posé des difficultés. Dans le début de l'exercice, on partait d'une solution à l'équation fonctionnelle et on ne raisonnait pas par équivalence. Il était donc important de vérifier que la ou les solutions trouvées convenaient, ce qui a souvent été oublié.

5. Même si la dérivée est souvent bien calculée, certains se sont contenté d'évoquer la décroissance de la fonction, ce qui est insuffisant pour justifier l'unicité : la continuité est une condition importante, souvent oubliée par les candidats, pour appliquer le théorème des valeurs intermédiaires ou son corollaire. Attention à donner le bon ensemble d'arrivée de la bijection : 0 n'est pas une valeur atteinte par les g_n. Une partie des candidats obtient que la dérivée de g_n est négative ou nulle, mais conclut néanmoins à la stricte décroissance de g_n sans autre justification. Plusieurs candidats ont affirmé que $g_n(0)$ est égal à 0.

6. Certains candidats ont tenté un raisonnement par l'absurde, en affirmant que la négation de la croissance d'une suite est la stricte décroissance de cette suite.

7. (a) Pour le calcul de l'espérance, la linéarité devait être évoquée (mais l'hypothèse d'indépendance, pourtant inutile, a souvent été avancée) ; pour le calcul de la variance, l'indépendance mutuelle devait être évoquée. De nombreux candidats se sont lancé dans le calcul de l'espérance et la variance pour une variable suivant une loi de Poisson, alors qu'on pouvait bien sûr utiliser les résultats classiques. On rencontre beaucoup de confusion entre loi de Poisson et loi exponentielle.

7. (b) L'hypothèse d'indépendance a été très souvent oubliée.

7. (c) Très peu de candidats connaissent l'énoncé du théorème central-limite, et certains confondent inégalité de Bienaymé-Tchebychev avec inégalité de Markov.

9. Lorsqu'on a plusieurs variables, il s'agit d'être précis sur les relations de comparaison que l'on donne. Le fait que l'intégrande est continue (ou continue par morceaux) et positive a rarement été évoqué. La détermination exacte du domaine de définition de Gamma est rarement

traitée : il manquait souvent la divergence de l'intégrale pour $x \leqslant 0$.

10. Le théorème de dérivation sous le signe intégral est souvent mal connu. La fonction proposée pour dominer la dérivée partielle a souvent été incorrecte et même lorsqu'elle l'était, son intégrabilité a rarement été établie.

11. L'intégration par parties nécessite un minimum de justification quand on mobilise des crochets à borne infinie. Il est conseillé aux candidats de poser les expressions des fonctions à intégrer et à dériver avant d'appliquer l'intégration par parties, afin d'éviter les erreurs et les confusions.

12. Le raisonnement par récurrence n'est pas toujours maîtrisé : il est arrivé plusieurs fois de voir écrit « supposons la propriété vraie pour tout entier n, et montrons-la au rang $n+1$ », ou « supposons la propriété vraie pour n » sans que l'on sache si c'est « pour tout n » ou « pour un entier n fixé ».

14. La concavité de la fonction lna souvent été correctement justifiée mais l'inégalité qui en découle a posé quelques problèmes. En particulier, des candidats ont eu besoin d'exprimer la convexité de la fonction $-\ln$. Il est important de vérifier que le poids choisi appartient à l'intervalle $]0,1[$, ce qui n'a pas toujours été fait. Par ailleurs, il est incorrect de poser à la fois $t = \dfrac{1}{p}$ et $1 - t = \dfrac{1}{q}$.

15. Le cas $u = 0$ ou $v = 0$ devait être traité à part, ce qui n'a pas toujours été fait.

17. Question peu traitée. Le cas $f = 0$ ou $g = 0$ devait aussi être traité à part.

18. Cette question a été bien traitée dans l'ensemble. Il fallait néanmoins faire attention aux équivalences. Il était préférable de mentionner la croissance de l'intégrale plutôt qu'un dessin, même pertinent.

19. Des erreurs notables sur la ré-indexation d'une somme finie de termes consécutifs d'une suite ont été souvent constatées.

20. Les encadrements proposés sont souvent corrects mais il convenait là encore de justifier l'existence des objets manipulés.

21. Le développement limité de $\ln(1+u)$ n'est pas toujours bien connu. Attention à ne pas sommer des équivalents ! Il est préférable de commencer par travailler avec des développements limités.

23. Il était attendu une représentation du graphe sur plusieurs périodes, en faisant attention aux valeurs de la fonction aux points de discontinuité.

24. La valeur exacte de $\cos(n\pi)$ en fonction de n est à connaître, ce qui n'a pas toujours été le cas.

25. Les hypothèses pour appliquer la formule de Parseval demandée ont rarement été données.

27 (a). Cette question a été très peu abordée, mais les correcteurs ont pu lire quelques programmes très bien écrits.

27 (b). On constate beaucoup de confusions sur les lois usuelles : binomiale, Bernoulli…, alors qu'il s'agissait ici d'un temps d'attente.

28. La loi géométrique prend ses valeurs dans $\mathbb{N}^*$: cela a posé quelques problèmes dans le calcul de la série génératrice. Le domaine de définition n'était pas toujours correct, certains candidats donnant seulement une condition suffisante de convergence avec t dans $]-1;1[$.

29 (b). Cette question a posé beaucoup de difficultés chez les candidats l'ayant abordée : le théorème de dérivation d'une série de fonctions est rarement maîtrisé.

29 (d). Peu de candidats ont remarqué que l'on pouvait appliquer le théorème de transfert et éviter de nombreux calculs.

31. Les hypothèses de l'inégalité de Hölder sont rarement rappelées et vérifiées.

32. (b) Certains candidats se sont lancé dans un raisonnement par récurrence sur des réels, ce qui est dépourvu de sens.

32 (c). On a pu rencontrer une utilisation abusive voire fausse du symbole $\Longleftrightarrow$. Cette question a dévoilé un manque d'aisance technique de la part de certains candidats sur la manipulation de puissances réelles de nombres strictement positifs : ainsi la simplification d'écriture $n!^x(n-1)!^{1-x}$ a posé des difficultés et en particulier la réécriture de $(n-1)!^{1-x}$ en $\dfrac{(n-1)!}{(n-1)!^x}$.

32 (e). Attention, $(n-1)!$ n'est pas équivalent à $n!$.

32 (f). Dans cette question, il convenait aussi de justifier que les suites $(u_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ admettaient une limite finie : deux suites équivalentes ne sont pas nécessairement convergentes.

37 La convergence de l'intégrale a rarement été prouvée ; le calcul de l'intégrale de$-A$ à A, avec A dans $\mathbb{R}$ ne suffit pas à prouver la convergence. La continuité de f a souvent été oubliée par ailleurs.

40 (b). Il s'agissait d'appliquer le théorème de convergence dominée, mais à une suite d'intégrales définies sur des intervalles différents. On peut résoudre cette difficulté en considérant des intégrales sur $\mathbb{R}^+$ et en introduisant les indicatrices des intervalles en question.

2.3 Conseils aux candidats

Il est très fortement conseillé d'écrire à l'encre noire ou bleu foncé sur les copies. Les copies étant scannées, l'encre bleu clair peut être difficile à décrypter. La qualité rédactionnelle des copies laisse parfois à désirer, l'orthographe approximative, l'écriture difficilement lisible ; les copies rendues par les candidats ne sauraient être l'équivalent d'un brouillon informe et couvert de ratures et il est conseillé d'utiliser préalablement des brouillons pour établir leurs raisonnements et ordonner leurs idées, afin d'éviter, dans la mesure du possible, bon nombre de ratures, de retours en arrière inutiles, qui perturbent la compréhension du cheminement entrepris et qui ne mettent pas en valeur la démarche engagée. Il est d'ailleurs assez surprenant de voir la rédaction des candidats quand on sait qu'ils sont d'ores et déjà enseignants. Il est par ailleurs déconseillé d'utiliser trop d'abréviations, telles que TAF ou TVI. Il est également préférable de ne pas recopier les questions sur les copies, afin que les correcteurs identifient bien où commence le raisonnement du candidat.

Dans les parties « vrai ou faux » des sujets, faire apparaître clairement que la conclusion de l'affirmation est apprécié, que ce soit en début ou en fin de réponse.

Par ailleurs, ces sujets sont progressifs et ils doivent permettre aux candidats de s'installer : il est donc tout aussi important que les premières questions soient abordées avec rigueur et que les raisonnements soient soignés, à l'instar de ce qu'un enseignant peut exiger de ses élèves sur des questions de cours. Par exemple, la première récurrence rencontrée doit être rédigée complètement et proprement. Une bonne rédaction commence généralement avec des hypothèses, puis un raisonnement au cours duquel les hypothèses sont précisément utilisées et une conclusion répondant à la question. Quand on utilise un théorème au programme ou le résultat d'une question précédente, il faut prendre soin de vérifier que les hypothèses sont satisfaites. Quand une question demande d'énoncer sans justification un résultat au programme, il faut aussi en donner les hypothèses d'application (par exemple, dans l'épreuve 2, question 7 (b), la stabilité des lois de Poisson ; question 7 (c), le théorème central limite et inégalité de Bienaymé-Tchebichev ; question 25 : égalité de Parseval). Aussi, quantifier les paramètres, fixer les objets, soigner l'articulation logique de sa preuve, gérer le sens des implications sont des compétences attendues : trop souvent les variables et notations utilisées ne sont pas introduites ou alors de façon insuffisante ; les quantificateurs s'utilisent dans des phrases mathématiques et non comme abréviations dans des phrases en français ; enfin, les correcteurs ont pu régulièrement lire des phrases telles que « montrons que $\mathrm{Ker}(f) = 0$ ». Rappelons aux candidats que $\mathrm{Ker}(f)$ est un ensemble et 0 un vecteur : les accolades ont leur importance !

Une telle épreuve est souvent longue et on invite les candidats à comprendre le sens du sujet et faire la distinction entre les différentes parties : celles dans lesquelles on redémontre des résultats de cours, celles où on traite des exemples et enfin le cas général. Il suffit de consulter les épreuves du concours pour constater l'accent mis sur la compréhension et la possible restitution du cours lors d'une épreuve. C'est un levier essentiel pour la réussite au concours de l'agrégation interne.

3 Rapport sur les épreuves orales

Les épreuves orales ont pour objectif « d'évaluer la capacité de concevoir, de mettre en œuvre et d'analyser l'enseignement d'une question mathématique donnée », ainsi que l'énonce l'arrêté définissant les épreuves du concours, disponible à l'adresse
`https://www.legifrance.gouv.fr/loda/id/JORFTEXT000021625792/2019-02-10/`.
Ces épreuves supposent une solide préparation car il faut savoir, sur un sujet précis, rassembler et structurer ses connaissances en vue d'exposer les notions mathématiques afférentes, de proposer des applications et des exemples d'illustration, de sélectionner des exercices formateurs et adaptés. Pour cela, les candidats sont notamment encouragés à faire de nombreux exercices d'entraînement afin d'acquérir une familiarité et une aisance suffisantes avec les notions mathématiques qu'ils n'ont pas l'occasion d'enseigner. Il est également important de préparer des plans possibles pour les différents sujets proposés. Le jury attend du candidat qu'il montre sa capacité à s'engager dans un véritable échange scientifique, ouvert et constructif. Il est conseillé de se montrer attentif aux questions, d'expliciter ses pistes de recherche et le fil de son raisonnement mathématique. Au delà de la maîtrise des connaissances du programme, c'est bien la maîtrise des compétences mathématiques et professionnelles du candidat qui pourra ainsi être valorisée.

Chacune des deux épreuves orales comporte un temps de préparation de trois heures. Les candidats reçoivent une convocation aux épreuves d'admission mentionnant l'heure du début des opérations (accueil, consignes pratiques, vérification d'identité et tirage du sujet ; il est recommandé par sécurité de se présenter un quart d'heure avant), ainsi que l'heure de passage devant la commission d'oral pour chacune des deux épreuves qui ont lieu, sur deux jours consécutifs, y compris dimanches et jours fériés. À leur première épreuve orale (épreuve d'exposé), les candidats tirent un couplage de deux sujets (au choix) qui relève soit du domaine *algèbre et géométrie* soit du domaine *analyse et probabilités*. Pour leur seconde épreuve orale (exemples et exercices), ils tirent un couplage de deux sujets au choix pris dans le domaine complémentaire (analyse et