Objectif du problème.
L'objectif du problème est d'étudier quelques propriétés d'une classe de fonctions étendant les fonctions périodiques, qui apparaissent naturellement dans les recherches de solutions bornées d'équations différentielles. Nous étudierons ensuite certains types d'équations différentielles.
La partie **I** introduit quelques préliminaires, la partie **II** certaines propriétés des fonctions continues périodiques, la partie **III** étudie l'espace des fonctions nommées *presque-périodiques* ainsi que quelques propriétés de celles-ci. La partie **IV** étend la notion de moyenne et l'analyse de Fourier au cadre des fonctions presque-périodiques. Enfin, la partie **V** s'intéresse à des équations différentielles linéaires.

Il est possible d'aborder une partie sans avoir traité les précédentes, à condition toutefois de prendre connaissance des notations, définitions et résultats établis auparavant.

Notations, définitions et rappels.

▷ Dans tout l'énoncé, ε désigne un nombre réel.

▷ Soit A une partie de $\mathbf{R}$. On note $\overline{A}$ l'adhérence de A.

▷ Soit f une fonction définie sur $\mathbf{R}$ et à valeurs dans $\mathbf{C}$ et $(f_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de fonctions définies sur $\mathbf{R}$ et à valeurs dans $\mathbf{C}$. On dit que la suite $(f_n)_{n\geqslant 1}$ converge uniformément vers f sur $\mathbf{R}$, ou que f est la limite uniforme de $(f_n)_{n\geqslant 1}$ sur $\mathbf{R}$, si à partir d'un certain rang les éléments de la suite $\left(\sup_{x\in\mathbf{R}}|f(x)-f_n(x)|\right)_{n\geqslant 1}$ sont des nombres réels et que la suite $\left(\sup_{x\in\mathbf{R}}|f(x)-f_n(x)|\right)_{n\geqslant 1}$ converge vers 0.
On rappelle qu'une limite uniforme d'une suite de fonctions continues (respectivement bornées) est continue (respectivement bornée).

▷ Soit $(a,b)\in\mathbf{R}^2$ avec $a\leqslant b$ et $f:[a,b]\to\mathbf{C}$ une fonction continue. On rappelle l'inégalité suivante :

$$\left|\int_a^b f(t)dt\right|\leqslant\int_a^b|f(t)|dt.$$

▷ Soit $(E,\|.\|_E)$ un $\mathbf{C}$-espace vectoriel normé et $L:E\to\mathbf{C}$ une forme linéaire.
On rappelle que L est continue si et seulement si il existe une constante $K\geqslant 0$ telle que :

$$\forall x\in E,\quad |L(x)|\leqslant K\|x\|_E.$$

Soit $L:E\to\mathbf{C}$ une forme linéaire continue. On appelle norme de L et on note $|||L|||$ le nombre $|||L|||=\sup\{|L(x)|;x\in E,\|x\|_E=1\}$.

Ensembles et espaces en jeu.

▷ Le $\mathbf{C}$-espace vectoriel des fonctions continues de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{C}$ est noté $C^0(\mathbf{R},\mathbf{C})$.

▷ On note $BC^0(\mathbf{R},\mathbf{C})$ le $\mathbf{C}$-espace vectoriel des fonctions continues bornées de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{C}$, qu'on munit de la norme suivante :

$$\|f\|_\infty=\sup_{x\in\mathbf{R}}|f(x)|.$$

On rappelle que $(BC^0(\mathbf{R},\mathbf{C}), \|.\|_\infty)$ est complet ; la limite d'une suite d'éléments de $BC^0(\mathbf{R},\mathbf{C})$ uniformément convergente est un élément de $BC^0(\mathbf{R},\mathbf{C})$.

Dans ce qui suit, nous allons introduire des ensembles de fonctions dont nous verrons plus tard qu'il s'agit de sous-ensembles de $BC^0(\mathbf{R},\mathbf{C})$.

▷ Pour tout réel T strictement positif, $C^0_T(\mathbf{R},\mathbf{C})$ désigne l'ensemble des fonctions f continues de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{C}$, T-périodiques (dont T est *une* période), c'est-à-dire satisfaisant :

$$\forall x \in \mathbf{R}, \quad f(x+T) = f(x).$$

Nous verrons dans la question **8a** que $C^0_T(\mathbf{R},\mathbf{C})$ est un sous-espace vectoriel fermé de $BC^0(\mathbf{R},\mathbf{C})$.
Pour $f \in C^0_T(\mathbf{R},\mathbf{C})$ et $k \in \mathbf{Z}$, on note $c_k(f)$ le k−ème coefficient de Fourier complexe de f, d'expression :

$$c_k(f) = \frac{1}{T}\int_0^T e^{-\frac{2ik\pi}{T}t} f(t)dt.$$

▷ $Per(\mathbf{R},\mathbf{C})$ désigne l'ensemble des fonctions continues périodiques de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{C}$, c'est-à-dire la réunion des ensembles $C^0_T(\mathbf{R},\mathbf{C})$ pour T réel strictement positif ; $Per(\mathbf{R},\mathbf{C}) = \bigcup_{T>0} C^0_T(\mathbf{R},\mathbf{C})$.

On note $VectPer(\mathbf{R},\mathbf{C})$ le sous-espace vectoriel engendré par $Per(\mathbf{R},\mathbf{C})$ dans $C^0(\mathbf{R},\mathbf{C})$.

▷ Pour $\lambda \in \mathbf{C}$, on note $e_\lambda : \mathbf{R} \to \mathbf{C}$ la fonction définie par $e_\lambda(x) = e^{i\lambda x}$.

▷ Soit n un entier strictement positif, $(\lambda_1,\ldots,\lambda_n) \in \mathbf{R}^n$ et $(a_1,\ldots,a_n) \in \mathbf{C}^n$.

On appelle *polynôme trigonométrique généralisé* la fonction $f = \sum_{j=1}^{n} a_j e_{\lambda_j}$.

L'ensemble des polynômes trigonométriques généralisés est un $\mathbf{C}$-espace vectoriel que l'on notera $PTG(\mathbf{R},\mathbf{C})$.
Le produit de deux éléments de $PTG(\mathbf{R},\mathbf{C})$ est un élément de $PTG(\mathbf{R},\mathbf{C})$.

▷ On note enfin $PP(\mathbf{R},\mathbf{C})$ l'ensemble des fonctions, dites *presque périodiques*, qui sont des limites uniformes de suites d'éléments de $VectPer(\mathbf{R},\mathbf{C})$.
Nous verrons à la question **14a** que les éléments de $PP(\mathbf{R},\mathbf{C})$ sont également les limites uniformes de suites de polynômes trigonométriques généralisés.

I. Préliminaires.

1. Les fonctions e_1 et e_{1+i} sont-elles des éléments de $BC^0(\mathbf{R},\mathbf{C})$?

2. Soit $(f_n)_{n\geqslant 1}$ la suite de fonctions définies sur $\mathbf{R}$ pour tout entier $n \geqslant 1$ par $f_n(x) = \frac{x}{nx+i}$.
Démontrer que la suite $(f_n)_{n\geqslant 1}$ est une suite d'éléments de $BC^0(\mathbf{R},\mathbf{C})$ qui converge uniformément. Précisez sa limite uniforme.

3. Soit $(f_n)_{n\geqslant 1}$ et $(g_n)_{n\geqslant 1}$ deux suites d'éléments de $BC^0(\mathbf{R},\mathbf{C})$, convergeant uniformément respectivement vers f et g. Démontrer que la suite $(f_n g_n)_{n\geqslant 1}$ converge uniformément vers fg.

4. Soit $(f_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de fonctions de $BC^0(\mathbf{R},\mathbf{C})$, convergeant uniformément vers f.
On suppose que pour tout entier $n \geqslant 1$, f_n est uniformément continue sur $\mathbf{R}$. On veut démontrer que f est uniformément continue sur $\mathbf{R}$.
Soit $\varepsilon > 0$. On considère un entier $n \geqslant 1$ tel que $\|f - f_n\|_\infty \leqslant \varepsilon/3$.

(a) Justifier qu'il existe un réel $\eta_\varepsilon > 0$ tel que si $(x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2$ vérifie $|x_1 - x_2| \leqslant \eta_\varepsilon$, alors $|f_n(x_2) - f_n(x_1)| \leqslant \varepsilon/3$.

(b) En déduire que si $(x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2$ vérifie $|x_1 - x_2| \leqslant \eta_\varepsilon$, alors $|f(x_2) - f(x_1)| \leqslant \varepsilon$. Conclure.

5. Soit n un entier strictement positif et $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ des nombres complexes distincts deux à deux. Démontrer que la famille $\{e_{\lambda_1}, \ldots, e_{\lambda_n}\}$ est libre dans le $\mathbf{C}$-espace vectoriel $C^0(\mathbf{R}, \mathbf{C})$. (On pourra utiliser la dérivation).

II. Quelques propriétés concernant les fonctions périodiques.

6. Soit T un réel strictement positif et h une fonction appartenant à $C^0_T(\mathbf{R}, \mathbf{C})$. Démontrer que pour tout réel t,

$$\int_t^{T+t} h(s)ds = \int_0^T h(s)ds.$$

7. Soit α un réel strictement positif. On introduit la fonction $g_\alpha : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ d'expression

$$g_\alpha(x) = \cos(x) + \cos(\alpha x).$$

(a) On suppose que $\alpha \in \mathbf{Q}$. Démontrer que g_α est périodique, et donner une période de g_α. On pourra écrire $\alpha = p/q$ avec $p, q \in \mathbf{N}^*$ premiers entre eux.

(b) On suppose que $\alpha \notin \mathbf{Q}$. Résoudre $g_\alpha(x) = 2$. La fonction g_α est-elle périodique ?

(c) L'ensemble $Per(\mathbf{R}, \mathbf{C})$ des fonctions continues périodiques de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{C}$ est-il un sous-espace vectoriel de $C^0(\mathbf{R}, \mathbf{C})$?

8. Soit T est un réel strictement positif. L'objectif de cette question est de démontrer que $C^0_T(\mathbf{R}, \mathbf{C})$ est un sous-espace vectoriel complet de $(BC^0(\mathbf{R}, \mathbf{C}), \|.\|_\infty)$.

(a) Démontrer que $C^0_T(\mathbf{R}, \mathbf{C})$ est un sous-espace vectoriel de $BC^0(\mathbf{R}, \mathbf{C})$.

(b) Démontrer que $C^0_T(\mathbf{R}, \mathbf{C})$ est fermé dans $BC^0(\mathbf{R}, \mathbf{C})$. En déduire que $C^0_T(\mathbf{R}, \mathbf{C})$ est complet.

9. Soit T un réel strictement positif, $f \in C^0_T(\mathbf{R}, \mathbf{C})$ et F une primitive quelconque de f. Démontrer l'équivalence entre les assertions suivantes :

- ▷ **(A1)** F est périodique et T est une période de F ;
- ▷ **(A2)** F est bornée ;
- ▷ **(A3)** $\displaystyle\int_0^T f(t)dt = 0$.

10. Soit T un réel strictement positif et $f \in C^0_T(\mathbf{R}, \mathbf{C})$. Démontrer que f est uniformément continue sur $\mathbf{R}$.

11. Soit $f \in C^0_{2\pi}(\mathbf{R}, \mathbf{C})$. On introduit pour tout entier $n \geqslant 1$ la fonction $K_n : \mathbf{R} \to \mathbf{C}$ d'expression

$$K_n = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \left(\sum_{j=-k}^{k} e_j \right),$$

et pour tout entier $n \geqslant 1$ et tout $x \in \mathbf{R}$, on pose :

$$f_n(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} K_n(x - t) f(t)dt.$$

Tournez la page S.V.P.

(a) Démontrer que pour tout entier $n \geqslant 1$ et tout $x \in \mathbf{R}$, on a :

$$f_n(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} K_n(t) f(x-t) dt.$$

(b) Soit $j \in \mathbf{Z}$. Calculer $\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e_j(t) dt$. En déduire que $\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} K_n(t) dt = 1$ pour tout entier $n \geqslant 1$.

(c) Démontrer que pour tout entier $n \geqslant 1$ et tout $x \in \mathbf{R} \setminus (2\pi\mathbf{Z})$, on a :

$$K_n(x) = \frac{\sin^2\left(\frac{nx}{2}\right)}{n \sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}.$$

(d) Démontrer que pour tout entier $n \geqslant 1$ et tout $x \in \mathbf{R}$:

$$f_n(x) - f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (f(x-t) - f(x)) K_n(t) dt.$$

(e) Soit $\varepsilon > 0$. Justifier l'existence d'un réel $\eta_\varepsilon \in]0, \pi[$ tel que, pour tout $(x, x') \in \mathbf{R}^2$, si $|x - x'| \leqslant \eta_\varepsilon$ alors $|f(x) - f(x')| \leqslant \varepsilon$. Déduire des questions précédentes que pour tout entier $n \geqslant 1$ et tout $x \in \mathbf{R}$:

$$|f_n(x) - f(x)| \leqslant \varepsilon + \frac{2\|f\|_\infty}{n \sin^2(\eta_\varepsilon/2)}.$$

(f) Trouver l'expression des réels $\beta_{n,j}$ tels que $K_n = \sum_{j=-(n-1)}^{n-1} \beta_{n,j} e_j$ pour tout entier $n \geqslant 1$.

(g) Démontrer que la suite de fonctions $(f_n)_{n \geqslant 1}$ est une suite de polynômes trigonométriques généralisés qui converge uniformément vers f sur $\mathbf{R}$.

(h) Soit T un réel strictement positif et $g \in C_T^0(\mathbf{R}, \mathbf{C})$. À l'aide des questions précédentes, trouver une suite de polynômes trigonométriques généralisés $(g_n)_{n \geqslant 1}$ convergeant uniformément vers g sur $\mathbf{R}$. On démontrera que la suite proposée répond à la question, et on donnera pour tout entier $n \geqslant 1$ l'expression de g_n en fonction des coefficients de Fourier complexes de g.

12. Le but de cette question est de démontrer que si une somme finie de fonctions périodiques continues à valeurs dans $\mathbf{C}$ admet une limite dans $\mathbf{C}$ en $+\infty$ (ou en $-\infty$), alors elle est constante. On procèdera par récurrence sur le nombre N de fonctions périodiques continues dans la somme.

(a) Montrer qu'une fonction périodique continue à valeurs dans $\mathbf{C}$ ayant une limite dans $\mathbf{C}$ en $+\infty$ est constante.

(b) Soit N un entier strictement positif. On considère une fonction $f = f_1 + \ldots + f_{N+1}$ où, pour tout $j \in \{1, \ldots, N+1\}$, $f_j : \mathbf{R} \to \mathbf{C}$ est continue, périodique de période T_j. Montrer que la fonction $g : \mathbf{R} \to \mathbf{C}$ définie par $g : x \mapsto f(x + T_{N+1}) - f(x)$ peut s'écrire comme somme de N fonctions périodiques.

(c) En déduire que si une somme finie de fonctions périodiques continues à valeurs dans $\mathbf{C}$ admet une limite $\ell \in \mathbf{C}$ en $+\infty$ alors elle est constante.

(d) Démontrer que si une somme finie de fonctions périodiques continues à valeurs dans $\mathbf{C}$ admet une limite $\ell \in \mathbf{C}$ en $-\infty$, alors elle est constante.

13. À chaque $\mu \in \mathbf{C}$ et $P : \mathbf{R} \to \mathbf{C}$ fonction polynomiale, on associe la fonction de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{C}$: $\varphi_{\mu,P} : t \mapsto e^{\mu t}P(t)$.

Soit N un entier strictement positif. Soit $(P_j)_{j\in\{1,\dots,N\}}$ une famille de N polynômes et $(\mu_j)_{j\in\{1,\dots,N\}}$ N nombres complexes deux à deux distincts.

On s'intéresse aux deux assertions suivantes :

- ▷ **(A4)** : Pour tout $j \in \{1,\dots,N\}$, soit le polynôme P_j est le polynôme nul, soit $\mathrm{Re}(\mu_j) = 0$ et le polynôme P_j est un polynôme constant.
- ▷ **(A5)** : $\displaystyle\sum_{j=1}^{N} \varphi_{\mu_j,P_j}$ est bornée sur $\mathbf{R}$.

(a) Soit μ un imaginaire pur et P un polynôme constant. Démontrer que $\varphi_{\mu,P}$ est bornée.

(b) Démontrer que l'assertion **(A4)** implique l'assertion **(A5)**.

(c) Dans la suite de cette question, on suppose que l'assertion **(A5)** est vraie. On suppose donc que $\sum_{j=1}^{N} \varphi_{\mu_j,P_j}$ est bornée sur $\mathbf{R}$ et, quitte à enlever le(s) terme(s) nul(s), que P_j est non nul pour tout $j \in \{1,\dots,N\}$.

On pose enfin $\alpha_j = \mathrm{Re}(\mu_j)$ pour tout $j \in \{1,\dots,N\}$, et quitte à réordonner, on suppose que les $\alpha_1 \geqslant \alpha_2 \geqslant \dots \geqslant \alpha_N$.

i. Soit Q un polynôme trigonométrique généralisé non nul. À l'aide de la question **12**, établir qu'il existe $\varepsilon_0 > 0$ et deux suites $(t_n)_{n\geqslant 1}$ et $(t'_n)_{n\geqslant 1}$ de réels tendant respectivement vers $+\infty$ et $-\infty$ tels que $|Q(t_n)| > \varepsilon_0$ et $|Q(t'_n)| > \varepsilon_0$ pour tout entier $n \geqslant 1$. On distinguera selon que Q est constant ou non.

ii. Démontrer qu'il existe un entier N', des polynômes trigonométriques généralisés $Q_0,\dots,Q_{N'}$ avec $Q_{N'}$ non nul, et une fonction ψ de limite nulle en $+\infty$ tels que :

$$\forall t \in \mathbf{R}, \quad \sum_{j=1}^{N} \varphi_{\mu_j,P_j}(t) = e^{\alpha_1 t}\left(\sum_{k=0}^{N'} t^k Q_k(t) + \psi(t)\right).$$

On distinguera deux cas, selon que les α_j sont tous égaux ou qu'il existe un entier $m \leqslant N-1$ tel que $\alpha_1 = \dots = \alpha_m > \alpha_{m+1}$.

iii. Démontrer que $\alpha_1 \leqslant 0$ et que, lorsque $\alpha_1 = 0$ on a $N' = 0$.

iv. Démontrer de même que $\alpha_N \geqslant 0$, puis en déduire que l'assertion **(A4)** est vraie.

III. Étude de $PP(\mathbf{R},\mathbf{C})$ et de ses éléments.

On rappelle que $PTG(\mathbf{R},\mathbf{C})$ désigne l'espace vectoriel des polynômes trigonométriques généralisés de $\mathbf{R}$ vers $\mathbf{C}$, et que $PTG(\mathbf{R},\mathbf{C})$ est stable par produit de deux de ses éléments.

On rappelle également que $PP(\mathbf{R},\mathbf{C})$ désigne l'ensemble des fonctions presque-périodiques de $\mathbf{R}$ vers $\mathbf{C}$.

14. (a) Démontrer que $f \in PP(\mathbf{R},\mathbf{C})$ si et seulement si f est limite uniforme d'une suite d'éléments de $PTG(\mathbf{R},\mathbf{C})$.

(b) Démontrer que $PP(\mathbf{R},\mathbf{C})$ est un sous-espace vectoriel fermé de $(BC^0(\mathbf{R},\mathbf{C}), \|.\|_\infty)$. En déduire que $PP(\mathbf{R},\mathbf{C})$ muni de la norme $\|.\|_\infty$ est un espace de Banach.

15. Démontrer que si $f \in PP(\mathbf{R},\mathbf{C})$ et $g \in PP(\mathbf{R},\mathbf{C})$ alors le produit $f.g$ appartient à $PP(\mathbf{R},\mathbf{C})$.

16. Le but de cette question est de démontrer que si $f : \mathbf{R} \to \mathbf{C}$ est une fonction continue et si $g \in PP(\mathbf{R},\mathbf{C})$ est telle que $g(\mathbf{R}) \subset \mathbf{R}$, alors $f \circ g \in PP(\mathbf{R},\mathbf{C})$.

(a) Démontrer que si $\tilde{f} : \mathbf{R} \to \mathbf{C}$ est polynomiale et si $\tilde{g} \in PTG(\mathbf{R}, \mathbf{C})$, alors $\tilde{f} \circ \tilde{g} \in PTG(\mathbf{R}, \mathbf{C})$.

(b) Soit $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ une fonction continue et $\tilde{g} \in PTG(\mathbf{R}, \mathbf{C})$ telle que $\tilde{g}(\mathbf{R}) \subset \mathbf{R}$. Démontrer que $K = \overline{\tilde{g}(\mathbf{R})}$ est un compact de $\mathbf{R}$, puis en déduire que $f \circ \tilde{g} \in PP(\mathbf{R}, \mathbf{C})$. *Indication : on pourra utiliser le fait que toute fonction continue sur un compact de* $\mathbf{R}$ *et à valeurs dans* $\mathbf{C}$ *est limite uniforme sur ce compact d'une suite de polynômes.*

(c) En conclure que si $f : \mathbf{R} \to \mathbf{C}$ est une fonction continue et si $g \in PP(\mathbf{R}, \mathbf{C})$ est telle que $g(\mathbf{R}) \subset \mathbf{R}$, alors $f \circ g \in PP(\mathbf{R}, \mathbf{C})$.

IV. Moyennes et coefficients de Fourier-Bohr.

Les notations et définitions introduites au fur et à mesure dans cette partie seront utilisées pour toute la suite du problème.

A) Moyennes.

Pour un réel τ strictement positif, on introduit la forme linéaire $\mathcal{M}_\tau$ de $C^0(\mathbf{R}, \mathbf{C})$ dans $\mathbf{C}$ qui à toute fonction $f \in C^0(\mathbf{R}, \mathbf{C})$ associe :

$$\mathcal{M}_\tau(f) = \frac{1}{\tau} \int_0^\tau f(t)dt$$

et sous réserve d'existence :

$$\mathcal{M}(f) = \lim_{\tau \to +\infty} \mathcal{M}_\tau(f).$$

L'objectif de cette partie est de démontrer que $\mathcal{M}(f)$ existe pour toute fonction $f \in PP(\mathbf{R}, \mathbf{C})$, et que $\mathcal{M}$ est une forme linéaire continue de $PP(\mathbf{R}, \mathbf{C})$ et que sa norme est égale à 1 .

17. Soit T un réel strictement positif et $f \in C^0_T(\mathbf{R}, \mathbf{C})$. Démontrer que $\mathcal{M}(f)$ existe et égal à :

$$\mathcal{M}(f) = \frac{1}{T} \int_0^T f(t)dt.$$

18. Démontrer que $\mathcal{M}(f)$ existe pour toute fonction $f \in VectPer(\mathbf{R}, \mathbf{C})$, puis que $\mathcal{M}$ est une forme linéaire continue de $(VectPer(\mathbf{R}, \mathbf{C}), \|.\|_\infty)$ et que sa norme est égale 1.

19. Soit τ et τ' deux réels strictement positifs et $f \in PP(\mathbf{R}, \mathbf{C})$. On considère $(f_n)_{n \geqslant 1}$ une suite d'éléments de $VectPer(\mathbf{R}, \mathbf{C})$ convergeant uniformément vers $f \in PP(\mathbf{R}, \mathbf{C})$.

(a) Démontrer que pour tout entier $n \geqslant 1$:

$$|\mathcal{M}_\tau(f) - \mathcal{M}_{\tau'}(f)| \leqslant 2\|f - f_n\|_\infty + |\mathcal{M}_\tau(f_n) - \mathcal{M}_{\tau'}(f_n)|.$$

(b) Démontrer que pour tout réel $\varepsilon > 0$, il existe un réel $A_\varepsilon > 0$ tel que si τ et τ' sont deux réels supérieurs à A_ε, alors :

$$|\mathcal{M}_\tau(f) - \mathcal{M}_{\tau'}(f)| \leqslant \varepsilon.$$

(c) En déduire que $\mathcal{M}(f)$ existe.

20. Démontrer que $\mathcal{M}$ est une forme linéaire continue de $(PP(\mathbf{R}, \mathbf{C}), \|.\|_\infty)$ et que sa norme $|||\mathcal{M}|||$ est égale à 1.

B) Coefficients de Fourier-Bohr.

Pour $f \in PP(\mathbf{R},\mathbf{C})$ et $\lambda \in \mathbf{R}$, on introduit, sous réserve d'existence :

$$a_\lambda(f) = \mathcal{M}(e_{-\lambda} f)$$

et :

$$\Lambda(f) = \{\lambda \in \mathbf{R}, a_\lambda(f) \neq 0\}.$$

21. Soit $\lambda \in \mathbf{R}$ et $f \in PP(\mathbf{R},\mathbf{C})$. Justifier l'existence de $a_\lambda(f)$, puis démontrer que a_λ est une forme linéaire continue de $(PP(\mathbf{R},\mathbf{C}), \|.\|_\infty)$. Donner un majorant de sa norme $|||a_\lambda|||$.

22. Soit N un entier strictement positif et $(\lambda_1, \dots, \lambda_N) \in \mathbf{R}^N$ tels que les λ_j soient deux à deux distincts.

Soit $f = \sum_{j=1}^{N} \alpha_j e_{\lambda_j} : \mathbf{R} \to \mathbf{C}$ un polynôme trigonométrique généralisé.

(a) Déterminer, pour tout $\lambda \in \mathbf{R}$, $a_\lambda(f)$.

(b) Démontrer que :

$$\mathcal{M}(|f|^2) = \sum_{j=1}^{N} |\alpha_j|^2.$$

23. Soit T un réel strictement positif. On considère une fonction $f \in C_T^0(\mathbf{R},\mathbf{C})$.

(a) Démontrer que pour tout entier $N \geqslant 1$:

$$\mathcal{M}_{NT}(e_{-\lambda} f) = \left(\frac{1}{T} \int_0^T e^{-i\lambda x} f(x) dx \right) \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} e^{-i\lambda j T}.$$

(b) En déduire que :

$$\Lambda(f) \subset \frac{2\pi}{T} \mathbf{Z},$$

et relier $a_\lambda(f)$ à un coefficient de Fourier de f.

24. Soit T_1, T_2 deux réels strictement positifs, $f_1 \in C_{T_1}^0(\mathbf{R},\mathbf{C})$ et $f_2 \in C_{T_2}^0(\mathbf{R},\mathbf{C})$ deux fonctions non constantes.

(a) Démontrer qu'il existe $\lambda_1 \in \mathbf{R}^*$ et $\lambda_2 \in \mathbf{R}^*$ tels que $a_{\lambda_1}(f_1) \neq 0$ et $a_{\lambda_2}(f_2) \neq 0$.

(b) En déduire une condition nécessaire et suffisante portant sur T_1 et T_2 pour que $f_1 + f_2$ soit périodique.

25. Soit $f \in PP(\mathbf{R},\mathbf{C})$ et $(f_n)_{n \geqslant 1}$ une suite d'éléments de $PTG(\mathbf{R},\mathbf{C})$ convergeant uniformément vers f.

(a) Démontrer que $a_\lambda(f_n) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} a_\lambda(f)$.

(b) En déduire que $\Lambda(f) \subset \bigcup_{n \geqslant 1} \Lambda(f_n)$.

(c) Démontrer que $\Lambda(f)$ est au plus dénombrable.

26. Soit $f \in PP(\mathbf{R},\mathbf{C})$ une fonction dérivable telle que sa dérivée f' soit un élément de $PP(\mathbf{R},\mathbf{C})$. Démontrer que pour tout $\lambda \in \mathbf{R}$, on a :

$$a_\lambda(f') = i\lambda a_\lambda(f).$$

Tournez la page S.V.P.

27. Soit $(\alpha_n)_{n\geqslant 0}$ une suite de complexes non nuls tels que la série $\sum \alpha_n$ soit absolument convergente, et $(\beta_n)_{n\geqslant 0}$ une suite de réels deux à deux distincts. Pour $x \in \mathbf{R}$, on pose sous réserve d'existence $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n e^{i\beta_n x}$.

(a) Démontrer que f est bien définie sur $\mathbf{R}$, puis que f est un élément de $PP(\mathbf{R}, \mathbf{C})$.

(b) Déterminer $\Lambda(f)$. Pour $\lambda \in \Lambda(f)$, on précisera la valeur de $a_\lambda(f)$.

C) Relation de Parseval.

Soit $f \in PP(\mathbf{R}, \mathbf{C})$. Pour tout sous-ensemble fini J de $\mathbf{R}$, on note :

$$S_J(f) = \sum_{\lambda \in J} |a_\lambda(f)|^2,$$

et l'on note $S(f)$ la borne supérieure des $S_J(f)$ lorsque J parcourt l'ensemble $\mathcal{P}_{finie}(\mathbf{R})$ des parties de $\mathbf{R}$ ayant un nombre fini d'éléments. On a *a priori* $S(f) \in \mathbf{R}_+ \cup \{+\infty\}$. On peut remarquer que si J_1 et J_2 sont deux parties finies satisfaisant $J_1 \subset J_2$, on a $S_{J_1}(f) \leqslant S_{J_2}(f)$.

Le but de cette partie est d'établir la *relation de Parseval pour les fonctions presque-périodiques*, c'est-à-dire :

$$S(f) = \mathcal{M}\left(|f|^2\right),$$

et d'en donner une application.

28. Démontrer la relation de Parseval lorsque $f : \mathbf{R} \to \mathbf{C}$ est un polynôme trigonométrique généralisé.

29. Soit $f \in PP(\mathbf{R}, \mathbf{C})$. L'objectif de cette question est d'établir l'inégalité $S(f) \leqslant \mathcal{M}\left(|f|^2\right)$.
Soit $(f_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de polynômes trigonométriques généralisés convergeant uniformément vers f, et soit J une partie finie de $\mathbf{R}$.

(a) Démontrer que $(S_J(f_n))_{n\geqslant 1}$ converge vers $S_J(f)$.

(b) Démontrer que $(|f_n|^2)_{n\geqslant 1}$ converge uniformément vers $|f|^2$.

(c) Soit $\varepsilon > 0$. Démontrer qu'il existe un entier N_ε tel que pour tout entier $n \geqslant N_\varepsilon$:

$$S_J(f_n) \leqslant \mathcal{M}\left(|f|^2\right) + \varepsilon.$$

(d) Conclure.

30. Soit $f \in PP(\mathbf{R}, \mathbf{C})$. Le but de cette question est d'établir l'inégalité $S(f) \geqslant \mathcal{M}\left(|f|^2\right)$.
Soit $\varepsilon > 0$ et $P \in PTG(\mathbf{R}, \mathbf{C})$ non nul tel que $\|f - P\|_\infty \leqslant \varepsilon$.
On pose $P^* = \sum_{\lambda \in \Lambda(f)\cap\Lambda(P)} a_\lambda(f) e_\lambda$.

(a) Démontrer que :

$$\mathcal{M}\left(|f - P^*|^2\right) = \mathcal{M}\left(|f|^2\right) - \sum_{\lambda \in \Lambda(f)\cap\Lambda(P)} |a_\lambda(f)|^2.$$

(b) Soit n un entier strictement positif et $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_n)$ un $n-$uplet de réels deux à deux distincts. On considère la fonction $\psi_\mu : (z_1, \dots, z_n) \mapsto \mathcal{M}\left(\left|f - \sum_{k=1}^n z_k e_{\mu_k}\right|^2\right)$ définie sur $\mathbf{C}^n$. Démontrer que :

$$\psi_\mu(z_1, \dots, z_n) = \mathcal{M}(|f|^2) + \sum_{k=1}^{n} |z_k - a_{\mu_k}(f)|^2 - \sum_{k=1}^{n} |a_{\mu_k}(f)|^2,$$

puis en déduire la valeur minimale de ψ_μ et l'élément de $\mathbf{C}^n$ réalisant le minimum.

(c) Déduire des questions précédentes que $\mathcal{M}\left(|f-P^*|^2\right) \leqslant \mathcal{M}\left(|f-P|^2\right)$, puis conclure.

31. Démontrer que pour toute fonction $f \in PP(\mathbf{R},\mathbf{C})$, on a $S(f) = \mathcal{M}\left(|f|^2\right)$.

32. Donner un exemple de fonction $f \in PP(\mathbf{R},\mathbf{C})$ telle que $\mathcal{M}(f) = 0$, mais dont les primitives ne sont pas des éléments de $PP(\mathbf{R},\mathbf{C})$. *Indication : on pourra utiliser la relation de Parseval, ainsi que les questions* **26** *et* **27**.

V. Solutions bornées d'équations différentielles.

Dans toute cette partie, on considère un entier $p \geqslant 1$. L'espace $\mathscr{M}_{p,1}(\mathbf{C})$ des matrices carrées à p lignes et une colonne et à coefficients complexes est muni de la norme suivante :

$$\forall X = \begin{pmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_p \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{p,1}(\mathbf{C}), \quad \|X\| = \sqrt{\sum_{j=1}^{p} |X_j|^2}.$$

Lorsque $p = 1$, on identifie $\mathscr{M}_{1,1}(\mathbf{C})$ à $\mathbf{C}$.

L'espace $\mathscr{M}_p(\mathbf{C})$ des matrices carrées d'ordre p à coefficients complexes est muni de la norme matricielle suivante :

$$\forall A \in \mathscr{M}_p(\mathbf{C}), \quad \|A\|_{\mathscr{M}_p(\mathbf{C})} = \sup_{\|X\|=1} \|AX\|.$$

On dit que $f : \mathbf{R} \to \mathscr{M}_{p,1}(\mathbf{C})$ est continue si chacune de ses composantes $f_j : \mathbf{R} \to \mathbf{C}$, pour $j \in \{1,\dots,p\}$, est continue. On écrit alors que $f \in C^0(\mathbf{R}, \mathscr{M}_{p,1}(\mathbf{C}))$.
On dit que $f : \mathbf{R} \to \mathscr{M}_{p,1}(\mathbf{C})$ est bornée si chacune de ses composantes $f_j : \mathbf{R} \to \mathbf{C}$, pour $j \in \{1,\dots,p\}$, est bornée.
Si $f : \mathbf{R} \to \mathscr{M}_{p,1}(\mathbf{C})$ est continue bornée, on écrit alors que $f \in BC^0(\mathbf{R}, \mathscr{M}_{p,1}(\mathbf{C}))$.

De la même façon, on dit que $f : \mathbf{R} \to \mathscr{M}_{p,1}(\mathbf{C})$ est continue $T-$périodique (resp. un polynôme trigonométrique généralisé, resp. une fonction presque périodique) si chacune de ses composantes $f_j : \mathbf{R} \to \mathbf{C}$, pour $j \in \{1,\dots,p\}$, est continue $T-$périodique (resp. un polynôme trigonométrique généralisé, resp. une fonction presque périodique).
On écrit alors que $f \in C^0_T(\mathbf{R}, \mathscr{M}_{p,1}(\mathbf{C}))$ (resp. $f \in PTG(\mathbf{R}, \mathscr{M}_{p,1}(\mathbf{C}))$, resp. $f \in PP(\mathbf{R}, \mathscr{M}_{p,1}(\mathbf{C}))$).

D) Solutions bornées d'équations différentielles autonomes.

On s'intéresse aux solutions $X : \mathbf{R} \to \mathscr{M}_{p,1}(\mathbf{C})$ à valeurs complexes de l'équation différentielle $X' = AX$, où $A \in \mathscr{M}_p(\mathbf{C})$, et plus particulièrement aux solutions bornées sur $\mathbf{R}$.
On note $\lambda_1,\dots,\lambda_r$ les valeurs propres (complexes) distinctes de A et $n_1,\dots,n_r$ leurs ordres de multiplicité ; on a $n_j \geqslant 1$ pour tout $j \in \{1,\dots,r\}$, et $\sum_{j=1}^r n_j = p$.
On rappelle que les sous-espaces caractéristiques de A sont les $C_j = \operatorname{Ker}\left((A-\lambda_j I_p)^{n_j}\right)$ pour $j \in \{1,\dots,r\}$, où I_p désigne la matrice identité d'ordre p. On rappelle que $\mathscr{M}_{p,1}(\mathbf{C})$ est somme directe des sous-espaces caractéristiques de A.
On utilisera les résultats de la question **13**, et notamment la notation $\varphi_{\mu,P}$ introduite dans cette question.

33. Dans cette question, on suppose que $p = 1$ et on s'intéresse donc aux solutions $x : \mathbf{R} \to \mathbf{C}$ de l'équation $(E) : x' = ax$ avec $a \in \mathbf{C}$.

(a) On suppose que $\operatorname{Re}(a) = 0$. Démontrer que toutes les solutions de (E) sont bornées.

(b) On suppose $\mathrm{Re}(a) \neq 0$. Démontrer que parmi toutes les solutions de (E), seule la solution nulle est bornée.

34. (a) Soit X une solution de $X' = AX$. En utilisant une base adaptée à la décomposition $\mathscr{M}_{p,1}(\mathbf{C}) = \oplus_k C_k$, démontrer que chaque composante de X est une somme de φ_{λ_j,P_j} pour $j \in \{1,\dots,r\}$, où chaque P_j est un polynôme de degré au plus $n_j - 1$.

(b) Trouver une condition nécessaire et suffisante sur A pour que seule la solution nulle de $X' = AX$ soit bornée.

(c) Démontrer que toute solution bornée de $X' = AX$ a pour composantes des polynômes trigonométriques généralisés.

E) Équations exponentiellement stables.

Considérons une équation différentielle linéaire $X' = A(t)X + B(t)$, où A est une fonction continue de $\mathbf{R}$ dans l'espace $\mathcal{M}_p(\mathbf{C})$ des matrices carrées d'ordre p à coefficients complexes, et B est une fonction continue de $\mathbf{R}$ à valeurs dans $\mathscr{M}_{p,1}(\mathbf{C})$.

On dit que cette équation satisfait l'hypothèse (ES) s'il existe des constantes réelles $M > 0$ et $\alpha > 0$ telles que, pour toute solution X définie sur $\mathbf{R}$ et à valeurs dans $\mathscr{M}_{p,1}(\mathbf{C})$ de l'équation homogène associée $X' = A(t)X$, et pour tout $(s,t) \in \mathbf{R}^2$ avec $t > s$, on ait :

$$\|X(t)\| \leqslant Me^{-\alpha(t-s)}\|X(s)\|.$$

On note $\mathscr{M}^-$ l'ensemble des matrices $A \in \mathscr{M}_p(\mathbf{C})$ dont toutes les valeurs propres sont de partie réelle strictement négative. On admet que :

$$\forall A \in \mathscr{M}^-, \quad \exists (C,\alpha) \in (\mathbf{R}_*^+)^2, \quad \forall \tau \in \mathbf{R}^+, \quad \|\exp(\tau A)\|_{\mathscr{M}_p(\mathbf{C})} \leqslant Ce^{-\alpha\tau}.$$

35. Dans cette question, on suppose que $p = 1$. On s'intéresse ainsi à l'équation $x' = a(t)x + b(t)$ où a et b sont des fonctions continues sur $\mathbf{R}$ et à valeurs dans $\mathbf{C}$.

(a) Rappeler l'expression des solutions de l'équation $x' = a(t)x$.

(b) Démontrer que, si $\sup_{\mathbf{R}} \mathrm{Re}(a) < 0$, alors l'hypothèse (ES) est satisfaite.

(c) Démontrer que, si a est périodique et si $\mathcal{M}(\mathrm{Re}(a)) < 0$, alors l'hypothèse (ES) est satisfaite.
Indication : on pourra commencer par constater que les primitives de $a - \mathcal{M}(a)$ sont bornées.

36. Dans cette question, on suppose que A est un élément de $\mathscr{M}^-$ et l'on s'intéresse à l'équation $X' = AX + B(t)$. Démontrer que l'hypothèse (ES) est satisfaite.

Désormais, on suppose que l'hypothèse (ES) est satisfaite.

37. Soit $B \in BC^0(\mathbf{R}, \mathscr{M}_{p,1}(\mathbf{C}))$. On s'intéresse à l'unicité des solutions bornées de $X' = A(t)X + B(t)$.

(a) Soit X une solution non nulle de $X' = A(t)X$. Démontrer que $X(t) \neq 0$ pour tout $t \in \mathbf{R}$, puis déterminer les limites lorsque $t \to +\infty$ et lorsque $t \to -\infty$ de $\|X(t)\|$.

(b) En déduire que l'équation $X' = A(t)X + B(t)$ admet au plus une solution bornée sur $\mathbf{R}$.

38. Soit $B \in BC^0(\mathbf{R}, \mathscr{M}_{p,1}(\mathbf{C}))$. On s'intéresse à l'existence des solutions bornées de $X' = A(t)X + B(t)$.

(a) On suppose que $p \geqslant 1$ et que la fonction $t \mapsto A(t)$ est une constante, encore notée A, et que A est un élément de $\mathscr{M}^-$.
Démontrer que l'expression :

$$X_B(t) = \int_{-\infty}^{t} \exp((t-s)A)B(s)ds$$

a un sens et définit une solution bornée X_B de $X' = AX + B(t)$.

(b) On suppose que $p = 1$ et que a est une fonction continue de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{C}$, telle que (ES) est satisfaite.
Proposer une expression similaire pour la solution bornée de $x' = a(t)x + B(t)$, dont on démontrera qu'elle convient.

39. Soit T un réel strictement positif. On suppose que les fonctions A et B sont périodiques, et que T est une période commune à ces deux fonctions. On suppose de plus que $X' = A(t)X + B(t)$ admet une unique solution bornée. Démontrer que la solution bornée est périodique, et que T en est une période.

40. Soit $B \in PP(\mathbf{R}, \mathscr{M}_{p,1}(\mathbf{C}))$ et $A \in \mathscr{M}^-$. On note X_B l'unique solution bornée de $X' = AX + B(t)$. Démontrer que $X_B \in PP(\mathbf{R}, \mathscr{M}_{p,1}(\mathbf{C}))$.

FIN DU SUJET