Q14a Attention aux erreurs facilement évitables ! Certains candidats expriment U à l'aide de l'inverse de X, ce qui n'a guère de sens, X étant une matrice non carrée.

Q14b et 15a Questions peu abordées.

Q15b Cette question a été bien résolue.

Q16a Cette question est en général bien faite, même si l'aspect algébriquement clos du corps de base est parfois passé sous silence.

Q16b Le produit de deux endomorphismes nilpotents n'est pas nécessairement nilpotent.

Q16c et d Questions peu abordées.

Q17 Cette question est bien faite en général.

Q18 La dimension est souvent devinée et assez rarement prouvée.

Q19 Question très peu abordée.

Q20 et 21 Questions correctement résolues quand elles sont abordées.

Q22 à 37 Questions abordées de manière très peu significative.

3.1.3 Quelques éléments de correction

Préliminaires

1. Soit A un élément nilpotent de $M_n(\mathbf{K})$, c'est à dire pour lequel il existe un entier naturel p non nul tel que $A^p = 0$. Quelle est sa trace ?

   Éléments de solution

   Le polynôme caractéristique de A est X^n. Sa trace est donc nulle (coefficient lié à X^{n-1}). Toute autre caractérisation des matrices nilpotentes est recevable.

2. Soient A, B, C trois éléments de $M_n(\mathbf{K})$.

   (a) Démontrer que $tr(AB) = tr(BA)$ et $tr(ABC) = tr(CAB)$.

   Éléments de solution

   En notant $A = (a_{i,j})$ et $B = (b_{i,j})$ on calcule

   $$tr(AB) = \sum_{i,k} a_{i,k} b_{k,i} = tr(BA).$$

   Il suffit en suite d'appliquer cela à AB et C.

   (b) Soient i, j, k, l quatre entiers tels que $1 \leqslant i \leqslant n$, $1 \leqslant j \leqslant n$, $1 \leqslant k \leqslant n$ et $1 \leqslant l \leqslant n$. Donner sans démonstration ce que vaut le produit $E_{i,j}E_{k,l}$. On utilisera le symbole de Kronecker.

   Éléments de solution

   Il est connu que, utilisant le symbole de Kronecker,

   $$E_{i,j}E_{k,l} = \delta_{j,k}E_{i,l}.$$

   (c) Démontrer que pour $n \geqslant 2$, il peut arriver que $tr(ABC) \neq tr(CBA)$.

   Éléments de solution

   Il suffit de prendre $A = E_{1,1}, B = E_{1,2}$ et $C = E_{2,1}$. Dans ce cas, $ABC = E_{1,1}$ et la trace vaut 1. Par ailleurs, $CBA = 0$ et la trace est nulle.

3. Les formes linéaires sur $M_n(\mathbf{K})$.

(a) Démontrer que si f est une forme linéaire sur $M_n(\mathbf{K})$, il existe une unique matrice A de $M_n(\mathbf{K})$ telle que pour toute matrice M de $M_n(\mathbf{K})$, on ait $f(M) = tr(AM)$.

Éléments de solution

Une forme linéaire sur $M_n(\mathbf{K})$ s'écrit, en notant $M = (m_{i,j})$,

$$f(M) = \sum_{i,k} a_{i,k} m_{k,i}$$

avec les $a_{i,k}$ des scalaires. Cela fournit une matrice A qui convient. En testant f pour les matrices élémentaires, on obtient pour tous i et j, $f(E_{i,j}) = a_{j,i}$ et on en déduit l'unicité cherchée.

(b) Démontrer que si les matrices $M_1, M_2, ..., M_{n^2}$ forment une base de $M_n(\mathbf{K})$, alors les formes linéaires définies pour tout entier i tel que $1 \leqslant i \leqslant n^2$ par $f_i(M) = tr(M_i M)$ forment une base de l'espace vectoriel des formes linéaires sur $M_n(\mathbf{K})$. En déduire qu'il existe une base $(F_1, ..., F_{n^2})$ de $M_n(\mathbf{K})$ telles que pour toute matrice M de $M_n(\mathbf{K})$, on ait

$$M = \sum_{i=1}^{n^2} tr(M_i M) F_i.$$

Éléments de solution

La question précédente se traduit par le fait que l'application qui à A associe la forme linéaire f_A définie par $f_A(M) = tr(AM)$ est un isomorphisme d'espace vectoriels entre $M_n(\mathbf{K})$ et son dual (la linéarité étant claire). Un tel isomorphisme transforme une base de $M_n(\mathbf{K})$ en base du dual, d'où le premier résultat. La base préduale de $(f_1, ... f_{n^2})$ fournit $(F_1, ..., F_{n^2})$ voulue.

(c) Démontrer que si f est une forme linéaire sur $M_n(\mathbf{K})$ telle que $f(MN) = f(NM)$ pour toutes matrices M et N de $M_n(\mathbf{K})$, alors f est proportionnelle à la trace. On pourra utiliser les matrices $E_{i,j}$ et le symbole de Kronecker, définis au début de cette partie.

Éléments de solution

Une telle forme linéaire s'écrit donc $f(M) = tr(AM)$ avec $A \in M_n(\mathbf{K})$. On a donc $tr(AMN) = tr(ANM)$ pour toutes matrices M et N. Prenons $M = E_{i,j}$ et $N = E_{k,l}$. Notons

$$A = \sum_{p,q} a_{p,q} E_{p,q}.$$

Alors

$$AMN = \sum_{p} a_{p,i} \delta_{j,k} E_{p,l},$$

de trace $a_{l,i}\delta_{j,k}$. De même, la trace de ANM est alors $a_{j,k}\delta_{l,i}$. Le choix $i = l$ et $j = k$ donne $a_{l,l} = a_{k,k}$. Le choix $i = l$ et $j \neq k$ donne $a_{j,k} = 0$. Ainsi, A est une matrice scalaire et en notant $A = \alpha I_n$ avec $\alpha \in \mathbf{K}$, on obtient $f = \alpha tr$. Une preuve directe est aussi possible.

4. Soit G un sous-groupe de $Gl_n(\mathbf{K})$. On note $\mathcal{G}$ la sous-algèbre de $M_n(\mathbf{K})$ engendrée par G.

(a) Démontrer que $\mathcal{G} = Vect(G)$ où $Vect(G)$ désigne le sous-espace vectoriel de $M_n(\mathbf{K})$ engendré par G.

Éléments de solution $Vect(G)$ est inclus dans $\mathcal{G}$. Comme G est un groupe, il contient I_n, donc $I_n \in Vect(G)$. En outre G étant un groupe, le produit de deux combinaisons linéaires d'éléments de G est encore une combinaison linéaire d'éléments de G. Ainsi, $Vect(G)$ est une sous-algèbre de $M_n(\mathbf{K})$ contenant G. On en déduit que $\mathcal{G}$ est inclus dans $Vect(G)$, ce qui conclut.

(b) Démontrer qu'il existe une base de $\mathcal{G}$ formée d'éléments de G.

Éléments de solution

Avec la question précédente, G constitue une famille génératrice de $\mathcal{G}$ en tant qu'espace vectoriel. On donc peut en extraire une base.

5. Soit E un $\mathbf{K}-$espace vectoriel de dimension finie et f et g deux endomorphismes de E. On suppose qu'ils commutent.

(a) Démontrer que tout sous-espace vectoriel propre de f est stable par g.

Éléments de solution

C'est une question de cours. Si λ est valeur propre de f et x un vecteur propre associé, alors $f(g(x)) = g(f(x)) = g(\lambda x) = \lambda g(x)$, ce qui prouve que $g(x)$ est dans le sous-espace vectoriel propre de f associé à la valeur propre λ.

(b) Démontrer que si g est diagonalisable, alors sa restriction à tout sous-espace stable (par g) est diagonalisable.

Éléments de solution

C'est une question de cours. Si g est diagonalisable, il est annulé par un polynôme de $\mathbf{K}[X]$ scindé à racines simples. Ce polynôme est aussi annulateur de la restriction de g, qui est donc diagonalisable.

(c) Démontrer que si f et g sont diagonalisables, alors ils sont co-diagonalisables, c'est à dire qu'ils possèdent une base commune de diagonalisation.

Éléments de solution

L'endomorphisme f est diagonalisable donc E est somme directe des sous-espaces propres de f. Chacun de ces sous-espaces propres est stable par g car f et g commutent. La restriction de g à chaque sous-espace propre de f est donc diagonalisable. On dispose donc d'une base de chaque sous-espace propre de f formée de vecteurs propres de g. En rassemblant ces bases, on obtient une base qui diagonalise à la fois f et g.

Un théorème de Burnside

6. Démontrer que l'ensemble des éléments de $L(E)$ qui commutent avec tous les éléments de $\mathcal{A}$ sont exactement les homothéties. On pourra considérer une valeur propre d'un tel endomorphisme.

Éléments de solution

Soit v un endomorphisme de E qui commute avec tous les éléments de $\mathcal{A}$. Notons λ une valeur propre de v. Il en existe bien car $\mathbf{C}$ est algébriquement clos. Le sous-espace propre correspondant est donc stable par tout élément u de $\mathcal{A}$. C'est donc nécessairement E d'après l'hypothèse car il n'est pas réduit à $\{0\}$. On en déduit que v est une homothétie. La réciproque est claire.

7. Démontrer à l'aide d'un exemple en dimension 2 que le résultat de la question précédente tombe en défaut si $\mathbf{C}$ est remplacé par $\mathbf{R}$. On pourra utiliser des rotations de $\mathbf{R}^2$.

Éléments de solution

Prenons $E = \mathbf{R}^2$ euclidien usuel et u une rotation d'angle distinct de 0 modulo π, $\mathcal{A} = \{u\}$. Les seuls sous-espaces de $\mathbf{R}^2$ stables par u sont $\{0\}$ et $\mathbf{R}^2$ et toutes les rotations commutent avec u car le groupe $SO(\mathbf{R}^2)$ est commutatif. On dispose donc d'un exemple, comme demandé.

8. **(a)** Décrire dans la base ci-dessus la matrice par blocs d'un élément de $L(E^n)$ qui commute avec tous les éléments $\rho(a)$ pour $a \in \mathcal{A}$. On désigne par $\mathcal{C}$ l'ensemble des endomorphismes de E^n qui commutent avec tous les éléments $\rho(a)$ pour $a \in \mathcal{A}$.

Éléments de solution

Si $a \in \mathcal{A}$ admet A comme matrice dans la base $(e_1, ..., e_n)$, alors la matrice de $\rho(a)$ dans la base de E^n correspondante est diagonale par blocs, tous les blocs étant égaux à A. Une matrice écrite par blocs $M = (M_{i,j})$ (tous de taille n) commute avec la matrice diagonale par blocs ci-dessus si et seulement si pour tous i et j, $AM_{i,j} = M_{i,j}A$. La question 6 donne donc que chaque $M_{i,j}$ est une matrice scalaire, c'est à dire qu'il existe un scalaire $\lambda_{i,j}$ tel que $M_{i,j} = \lambda_{i,j} I_n$. La réciproque est claire et on a donc la description voulue.

(b) Démontrer que si $f \in L(E)$, alors $\rho(f)$ commute avec tous les éléments de $\mathcal{C}$. On pourra considérer la matrice par blocs de $\rho(f)$.

Éléments de solution

Si $f \in L(E)$ est de matrice A dans la base $(e_1, ..., e_n)$, alors la matrice de $\rho(f)$ dans la base de E^n correspondante est diagonale par blocs, tous les blocs étant égaux à A. Une telle matrice commute bien avec celles obtenues à la question précédente, tous les blocs étant des matrices scalaires. On a donc le résultat.

9. Soit $W \subset E^n$ un sous-espace vectoriel stable par tous les $\rho(a)$ pour $a \in \mathcal{A}$. On se propose de démontrer que W admet un supplémentaire dans E^n également stable par tous les $\rho(a)$ pour $a \in \mathcal{A}$.

(a) Démontrer que si $i \in \{1, ..., n\}$, alors $W \cap E_i = \{0\}$ ou $W \cap E_i = E_i$.

Éléments de solution

Le sous-espace W est stable par tous les $\rho(a)$ et E_i aussi, donc $W \cap E_i$ également. Pour $x \in E$, $\rho(a)((0, ..., 0, x, 0, ..., 0)) = (0, ..., 0, a(x), 0, ..., 0)$ (avec x et $a(x)$ écrits en place i) donc l'hypothèse faite sur $\mathcal{A}$ conclut : $W \cap E_i = \{0\}$ ou E_i.

(b) Si $W \cap E_1 = \{0\}$, on pose $W_2 = W \oplus E_1$ et si $W \cap E_1 = E_1$, on pose $W_2 = W$. Que vaut $W_2 \cap E_2$?

Éléments de solution

Comme précédemment, W_2 et E_2 étant stables par tous les $\rho(a)$, cette intersection est $\{0\}$ ou E_2.

(c) En poursuivant comme ci-dessus, construire une suite croissante $W_1 = W, W_2, ..., W_n$ de n sous-espaces de E^n stables par tous les $\rho(a)$ pour $a \in \mathcal{A}$, avec $W_n = E^n$ et en déduire l'existence d'un supplémentaire de W dans E^n également stable par tous les $\rho(a)$ pour $a \in \mathcal{A}$.

Éléments de solution

On continue le processus de proche en proche : $W_3 = W_2 \oplus E_2$ si $W_2 \cap E_2 = \{0\}$ et W_2 si $W_2 \cap E_2 = E_2$ etc...jusqu'à l'ordre n. Cette suite finie est clairement croissante et constituée de sous-espaces tous stables par les $\rho(a)$. On a bien $W_n = E^n$ car par construction $E^n = E_1 \oplus ... \oplus E_n \subset W_n \subset E^n$. On dispose donc de $W \subset W_2 \subset ... \subset W_n = E^n$ tous stables par les $\rho(a)$. On part alors d'une base de W et on complète en base de W_2 puis de W_3 etc... jusqu'à obtenir une base de E^n ainsi : on ne rajoute rien quand $W_i = W_{i+1}$ dans la construction précédente et on complète avec une base de E_i quand $W_{i+1} = W_i \oplus E_i$. Les vecteurs ainsi rajoutés à la base de W engendrent alors clairement un sous-espace supplémentaire de W dans E^n formé de la somme directe d'un certain nombre de E_i, donc bien stable par les $\rho(a)$.

10. Soit $W \subset E^n$ un sous-espace vectoriel stable par tous les $\rho(a)$ pour $a \in \mathcal{A}$. Soit W' un supplémentaire de W dans E^n également stable par tous les $\rho(a)$ pour $a \in \mathcal{A}$. Notons $p : E^n \to E^n$ la projection sur W parallèlement à W'. Démontrer que p commute avec tous les $\rho(a)$ pour $a \in \mathcal{A}$.

Éléments de solution

Soit a dans $\mathcal{A}$.

Si $x \in W$, alors $p \circ \rho(a)(x) = \rho(a)(x) = \rho(a) \circ p(x)$.

Si $x \in W'$, alors $p \circ \rho(a)(x) = 0 = \rho(a) \circ p(x)$.

Ainsi on a bien $p \circ \rho(a) = \rho(a) \circ p$ car Wet W' sont supplémentaires dans E^n.

11. Soit $W \subset E^n$ l'ensemble formé des éléments $(a(e_1), ..., a(e_n))$ quand a décrit $\mathcal{A}$. Vérifier que W est un sous-espace vectoriel de E^n et qu'il est stable par tous les $\rho(b)$ pour $b \in \mathcal{A}$. En utilisant la question précédente, démontrer que si $f \in L(E)$, il existe $a \in \mathcal{A}$ tel que $(f(e_1), ..., f(e_n)) = (a(e_1), ..., a(e_n))$. Conclure que $\mathcal{A} = L(E)$ et énoncer finalement le résultat obtenu.

Éléments de solution

Sans difficulté, W est bien un sous-espace vectoriel de E^n en raison de la structure d'algèbre de $\mathcal{A}$.

Si a et b sont dans $\mathcal{A}$, alors $\rho(b)(a(e_1), ..., a(e_n)) = (b \circ a(e_1), ..., b \circ a(e_n)) \in W$ car $b \circ a \in \mathcal{A}$.

Notons p un projecteur sur W construit comme à la question précédente. Soit $f \in L(E)$.

On a alors $(f(e_1), ..., f(e_n)) = \rho(f)(e_1, ..., e_n) = \rho(f)(p(e_1), ..., p(e_n)) = \rho(f) \circ p(e_1, ..., e_n)$ car $e_1, ..., e_n$ sont dans W (il suffit de prendre pour a l'identité).

Avec la question 10, p est donc dans l'ensemble $\mathcal{C}$ et avec la question 8b, p commute avec $\rho(f)$. Ainsi, $(f(e_1), ..., f(e_n)) = p \circ \rho(f)(e_1, ..., e_n) = p(f(e_1), ..., f(e_n)) \in W$ car p est un projecteur sur W.

Il existe donc $a \in \mathcal{A}$ tel que $(f(e_1), ..., f(e_n)) = (a(e_1), ..., a(e_n))$. On conclut que $f = a$ car ils coincident sur une base de E. Finalement, $\mathcal{A} = L(E)$. C'est le théorème de Burnside.

12. Dans cette question, on illustre l'importance du fait que $\mathcal{A}$ soit une sous-algèbre dans le théorème de Burnside. On confond matrice de $M_3(\mathbf{C})$ et endomorphisme de $\mathbf{C}^3$ canoniquement associé. On définit

$$\mathcal{A} = \{ \begin{pmatrix} 0 & a & 0 \\ b & 0 & -a \\ 0 & b & 0 \end{pmatrix}, (a, b) \in \mathbf{C}^2 \}.$$

(a) Démontrer que tous les éléments de $\mathcal{A}$ sont nilpotents.

Éléments de solution

Si A est dans $\mathcal{A}$, on peut par exemple calculer A^3 pour trouver 0 ou aussi calculer le polynôme caractéristique qui est X^3.

(b) Démontrer que la sous-algèbre de $M_3(\mathbf{C})$ engendrée par $\mathcal{A}$ contient toutes les matrices diagonales. On pourra considérer A dans $\mathcal{A}$ formée avec $a = 0$ et $b = 1$ et B formée avec $a = 1$ et $b = 0$.

Éléments de solution

Notons $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. On vérifie alors que $AB = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ et $BA = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. La famille (I_3, AB, BA) est libre et forme donc une base du sous-espace des matrices diagonales. Ces matrices sont dans l'algèbre engendrée par $\mathcal{A}$, ce qui prouve le résultat voulu.

(c) Déterminer les sous-espaces vectoriels de $\mathbf{C}^3$ stables par tous les éléments de $\mathcal{A}$. Que peut-on en déduire quant aux hypothèses du théorème de Burnside ?

Éléments de solution

Si une droite D est stable par tous les éléments de $\mathcal{A}$, elle est dirigée par un vecteur non nul qui est propre pour tous les éléments de $\mathcal{A}$. La seule valeur propre d'un élément de $\mathcal{A}$ est 0 et donc ce vecteur est dans le noyau de tous les éléments de $\mathcal{A}$. Il est nul en examinant par exemple A et B ci-dessus. Il n'y a donc pas de droite stable.

Si un plan P est stable par tous les éléments de $\mathcal{A}$, il l'est par tous les éléments de l'algèbre engendrée. Il admet une équation cartésienne du type $\alpha x + \beta y + \gamma z = 0$ avec

$(\alpha, \beta, \gamma) \neq (0,0,0)$. Par exemple, $\alpha \neq 0$. La stabilité par l'endomorphisme canoniquement associé à la matrice élémentaire $E_{1,1}$ (qui est diagonale) assure que ce plan est le plan dont une équation est $x = 0$. Il n'est pas stable par l'endomorphisme canoniquement associé à B ci-dessus. Il n'y a donc pas de plan stable. On peut aussi utiliser le lien entre plan stable et vecteur propre d'une transposée.

Finalement, les seuls sous-espaces stables par tous les éléments de $\mathcal{A}$ sont $\{0\}$ et $\mathbf{C}^3$. Comme $\mathcal{A} \neq M_3(\mathbf{C})$, la structure d'algèbre dans le théorème de Burnside s'avère nécessaire. La seule structure d'espace vectoriel ne suffit pas.

13. Dans cette question, on note u l'endomorphisme de $\mathbf{Q}^3$ canoniquement associé à la matrice

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

et $\mathcal{A}$ la sous-algèbre de $L(\mathbf{Q}^3)$ engendrée par u.

(a) Démontrer que le polynôme $X^3 + X + 1$ est irréductible dans $\mathbf{Q}[X]$.

Éléments de solution

Si ce polynôme n'était pas irréductible dans $\mathbf{Q}[X]$, il serait divisible par un facteur de degré 1 car il est de degré 3. Il aurait donc une racine rationnelle, disons p/q, avec $p \in \mathbf{Z}$, $q \in \mathbf{N}^*$ et $p \wedge q = 1$. En injectant, on trouve donc $p^3 + pq^2 + q^3 = 0$. Cela conduit à $p|q^3$ et $q|p^3$ et donc $p = 1$ ou -1 et $q = 1$ car $p \wedge q = 1$. Ni 1 ni -1 ne sont racines, d'où l'irréductibilité annoncée.

(b) Expliciter une base de $\mathcal{A}$ en fonction de u.

Éléments de solution

Le polynôme précédent est le polynôme caractéristique de u (le calculer ou remarquer que la matrice proposée est une matrice compagnon). Le théorème de Hamilton-Cayley assure donc par division euclidienne que l'on dispose de $\mathcal{A} = \mathbf{Q}[u] = \mathbf{Q}_2[u]$. La famille $(id_{\mathbf{Q}^3}, u, u^2)$ est donc génératrice de $\mathcal{A}$. Le polynôme précédent est le polynôme caractéristique de u et est irréductible, c'est donc aussi son polynôme minimal. Il n'existe donc pas de polynôme annulateur non nul de degré $\leqslant 2$. Cela garantit la liberté de la famille ci-dessus. C'est donc une base de $\mathcal{A}$.

(c) Démontrer que $\mathcal{A}$ est un corps.

Éléments de solution

Seul le caractère inversible dans $\mathcal{A}$ de tout élément non nul est à examiner. Un élément non nul de $\mathcal{A}$ s'écrit $P(u)$ avec $P \in \mathbf{Q}_2[X]$ non nul. Ce polynôme est premier avec $X^3 + X + 1$ car ce dernier est irréductible dans $\mathbf{Q}[X]$. Le théorème de Bezout fournit donc A et B dans $\mathbf{Q}[X]$ tels que $AP + (X^3 + X + 1)B = 1$. L'évaluation en u donne $A(u)P(u) = id_{\mathbf{Q}^3}$, ce qui montre que $\mathcal{A}$ est bien un corps.

(d) Déterminer les sous-espaces de $\mathbf{Q}^3$ stables par u. Que peut-on en déduire quant aux hypothèses du théorème de Burnside ?

Éléments de solution

Si un sous-espace est stable par u et de dimension 1 ou 2, le polynôme caractéristique de la restriction de u à ce sous-espace divise $X^3 + X + 1$ et est degré 1 ou 2, ce qui est impossible par irréductibilité de $X^3 + X + 1$. Les seuls sous-espaces stables par u sont donc $\{0\}$ et $\mathbf{Q}^3$. Le théorème de Burnside tombe en défaut dans ce cas car $\mathcal{A} \neq L(\mathbf{Q}^3)$. L'hypothèse sur le corps de base $\mathbf{C}$ s'avère nécessaire.

On note $U_n(\mathbf{C})$ le groupe unitaire de taille n. On munit $\mathbf{C}^n$ de son produit scalaire canonique.

(a) Démontrer que si X et Y sont deux vecteurs de $\mathbf{C}^n$ de norme (associée au produit scalaire canonique) valant 1, il existe $U \in U_n(\mathbf{C})$ telle que $UX = Y$.

Éléments de solution

Il suffit d'utiliser le théorème de la base incomplète et que les éléments de $U_n(\mathbf{C})$ sont caractérisés par le fait qu'ils envoient bon sur bon.

(b) Démontrer que le sous-espace vectoriel de $M_n(\mathbf{C})$ engendré par $U_n(\mathbf{C})$ est $M_n(\mathbf{C})$ tout entier. On pourra utiliser la question 4(a) du préliminaire.

Éléments de solution

La sous-algèbre engendrée par $U_n(\mathbf{C})$ est $Vect(U_n(\mathbf{C}))$ car $U_n(\mathbf{C})$ est un groupe. Si un sous-espace de $\mathbf{C}^n$ est stable par tous les éléments unitaires, il l'est par ceux de l'algèbre engendrée. Si un tel sous-espace est non réduit à $\{0\}$, il contient un vecteur de norme 1, donc tous les vecteurs de norme 1, donc c'est $\mathbf{C}^n$. On en déduit que $Vect(U_n(\mathbf{C})) = M_n(\mathbf{C})$ avec le théorème de Burnside.

14. Un sous-groupe nécessairement borné.

Soit G un sous-groupe de $Gl_n(\mathbf{C})$. On suppose que G est irréductible et que les valeurs propres des éléments de G sont toutes de module égal à 1. On désire démontrer que le groupe G est borné.

(a) Démontrer qu'il existe une base $(M_1, ..., M_{n^2})$ de $M_n(\mathbf{C})$ formée d'éléments de G. On pourra utiliser la question 4(a) du préliminaire.

Éléments de solution

La structure de groupe de G donne que $Vect(G)$ est la sous-algèbre engendrée par G avec la question 4a du préliminaire. Le théorème de Burnside assure alors que c'est $M_n(\mathbf{C})$ et le résultat en découle.

(b) Démontrer que pour tout entier i tel que $1 \leqslant i \leqslant n^2$ et tout élément M de G, on a $|tr(M_iM)| \leqslant n$. En déduire que le groupe G est borné pour toute norme sur $M_n(\mathbf{C})$. On pourra utiliser la question 3(b) du préliminaire.

Éléments de solution

Pour M dans G et tout i, la matrice MM_i est dans G, donc $|tr(M_iM)| \leqslant n$ puisque la trace est la somme des valeurs propres. Avec la question 3b du préliminaire et ses notations, on écrit pour toute matrice M de G

$$M = \sum_{i=1}^{n^2} tr(M_iM)F_i.$$

Le résultat suit par équivalence des normes en dimension finie.

15. Un résultat de co-trigonalisation.

Soit G un sous-groupe de $Gl(\mathbf{C}^n)$ formé d'éléments tous unipotents, c'est à dire tel que pour tout $g \in G$, la seule valeur propre de g soit 1. On désire démontrer que les éléments de G sont co-trigonalisables, ce qui constitue un théorème dû à Kolchin. On note $\mathcal{G}$ la sous-algèbre de $L(\mathbf{C}^n)$ engendrée par G.

(a) Démontrer qu'un endomorphisme g de $\mathbf{C}^n$ admet 1 comme seule valeur propre si et seulement si $g - id_{\mathbf{C}^n}$ est nilpotent.

Éléments de solution

C'est une conséquence du fait que l'on travaille dans $\mathbf{C}$ et du théorème de Cayley-Hamilton.

On suppose que $\mathcal{G}$ est irréductible.

Soit a un élément de G. On écrit $a = id_{\mathbf{C}^n} + b$ avec b nilpotent.

(b) Démontrer que pour tout élément f de G, $tr(b \circ f) = 0$.

Éléments de solution

Si f est un élément de G, alors $tr(a \circ f) = tr(f) + tr(b \circ f)$. Comme $a \circ f$ et f sont dans G et que les éléments de G sont unipotents, leur trace vaut n. On déduit que $tr(b \circ f) = 0$.

(c) En déduire que $b = 0$ puis que l'hypothèse faite sur l'irréductibilité de $\mathcal{G}$ est absurde.

Éléments de solution

On déduit de la question précédente que $tr(b \circ f) = 0$ pour tout élément f de G, donc pour tout élément f de $Vect(G) = \mathcal{G}$ par linéarité de la trace et car G est un groupe. Le théorème de Burnside donne que $\mathcal{G} = Ł(\mathbf{C}^n)$ et on en déduit encore comme ci-dessus que $b = 0$. Finalement, G est réduit à l'identité et par irréductibilité $n = 1$, ce qui est exclu. On ne peut donc pas avoir $\mathcal{G}$ irréductible.

D'après la question précédente, $\mathcal{G}$ n'est pas irréductible.

(d) Démontrer le théorème de Kolchin énoncé ci-dessus en procédant par récurrence.

Éléments de solution

Comme $\mathcal{G}$ n'est pas irréductible, on peut trouver un sous-espace vectoriel distinct de $\{0\}$ et $\mathbf{C}^n$ stable par tous les éléments de G. Dans une base adaptée les éléments g de G ont une matrice triangulaire par blocs, c'est à dire sous la forme

$$\begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix}$$

avec A et C carrées de tailles $\leqslant n - 1$.

Si $n = 2$, cela montre que les éléments de G sont bien co-trigonalisables. Supposons donc $n \geqslant 3$. On raisonne par récurrence sur n. Le cas $n = 2$ est acquis et on suppose le résultat prouvé pour les dimensions $\leqslant n - 1$. L'ensemble des A et l'ensemble des C obtenus ci-dessus quand g décrit G sont des sous-groupes de groupes linéaires convenables auxquels on peut appliquer l'hypothèse de récurrence (car les valeurs propres de la matrice par blocs ci-dessus sont les valeurs propres de A et celles de C), donc que l'on peut chacun co-trigonaliser. En raisonnant par blocs, on peut donc co-trigonaliser les éléments de G car si P et Q sont des matrices inversibles qui trigonalisent respectivement A et C, alors la matrice inversible $\begin{pmatrix} P & 0 \\ 0 & Q \end{pmatrix}$ trigonalise bien $\begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix}$.

Autour des matrices magiques et des matrices de permutation

16. Pour $i \in \{1, ..., n\}$, on note f_i (resp g_i) la forme linéaire qui à une matrice de $M_n(\mathbf{C})$ associe la somme des coefficients de la ligne i (resp la colonne i).

Démontrer que la famille $(f_1, ..., f_n, g_1, ..., g_n)$ est liée mais que $(f_1, ..., f_n, g_1, ..., g_{n-1})$ est libre.

Éléments de solution

La première famille est liée car on dispose clairement de l'égalité $f_1 + ... + f_n = g_1 + ... + g_n$, ce qui revient à sommer tous les coefficients de deux manières.

Pour la seconde famille, prenons $\lambda_1, ..., \lambda_n, Mu_1, ..., Mu_{n-1}$ dans $\mathbf{C}$ tels que

$$(*) : \sum_1^n \lambda_i f_i + \sum_1^{n-1} Mu_i g_i = 0.$$

On évalue cela en $E_{k,n}$ pour k de 1 à n (base canonique usuelle) et on obtient donc $\lambda_k = 0$ pour tout k. L'égalité $(*)$ devient alors

$$\sum_1^{n-1} Mu_i g_i = 0.$$

On évalue cette fois en $E_{1,k}$ pour k entre 1 et $n - 1$ et cela donne $Mu_k = 0$ pour tout k.

17. Déterminer la dimension du sous-espace $\mathcal{M}_0$ de $\mathcal{M}$ formé des matrices dont la somme des éléments de chaque ligne et de chaque colonne vaut 0.

Éléments de solution

Le sous-espace $\mathcal{M}_0$ est défini par les équations

$$f_1 = ... = f_{n-1} = f_n = g_1 = ... = g_{n-1} = 0.$$

La dernière équation $g_n = 0$ est inutile car conséquence de la relation de liaison ci-dessus. Les formes linéaires en jeu ci-dessus sont indépendantes.

La dimension cherchée est donc $n^2 - (2n-1) = (n-1)^2$.

18. En déduire la dimension de $\mathcal{M}$.

Éléments de solution

Un élément de $\mathcal{M}$ est défini par les équations

$$f_1 - f_n = ... = f_{n-1} - f_n = g_1 - f_n = ... = g_{n-1} - f_n = 0.$$

Comme ci-dessus, ces formes linéaires forment une famille libre et la dimension cherchée est donc $n^2 - (2n-2) = n^2 - 2n + 2$. Il est aussi possible de remarquer que $\mathcal{M} = \mathcal{M}_0 \oplus Vect(J)$ avec J la matrice dont les coefficients valent tous 1. La dimension suit.

19. Justifier que l'espace vectoriel engendré par les matrices de permutation P_σ est inclus dans $\mathcal{M}$.

Éléments de solution

Une telle matrice P_σ étant une matrice ayant un seul coefficient non nul par ligne et par colonne, ce coefficient valant 1, le résultat est évident. La structure d'espace vectoriel admise permet de conclure.

20. Démontrer que si m est un endomorphisme de $\mathbf{C}^n$ de matrice M dans la base $\mathcal{C}$, alors $M \in \mathcal{M}$ si et seulement si H et D sont stables par m.

Éléments de solution

Si M est magique, D est stable par m car la somme des éléments des lignes de M est constante. Comme $\overline{M}^T$ est magique aussi, D est stable par l'endomorphisme associé et donc son orthogonal H (pour le produit scalaire canonique de $\mathbf{C}^n$) est stable par m. (On peut dire que si un sous-espace est stable par un endomorphisme, son orthogonal l'est par l'adjoint).

Réciproquement, si D et H sont stables par m, la somme des éléments des lignes de M est constante. Comme avant, D est stable par l'endomorphisme associé à $\overline{M}^T$, donc la somme des éléments de ses lignes est constante. La somme des éléments des colonnes de M l'est donc aussi. C'est la même constante que pour ses lignes : il suffit de sommer tous les coefficients de M pour s'en apercevoir.

21. Démontrer que les seuls sous-espaces de $\mathbf{C}^n$ stables par tous les endomorphismes p_σ quand σ décrit toutes les permutations de $\{1, ..., n\}$ sont $\{0\}$, la droite D, l'hyperplan H et $\mathbf{C}^n$. On pourra traiter le cas d'une droite puis celui d'un sous-espace non inclus dans D.

Éléments de solution

Si une droite est stable par tous les endomorphismes p_σ et dirigée par $a_1e_1 + ... + a_ne_n$, alors $a_1 = a_2 = ... = a_n$ en utilisant les transpositions $(1,2), ..., (1,n)$. C'est donc D.

Si un sous-espace est stable par tous les endomorphismes p_σ et n'est pas inclus dans D, il contient un vecteur $a_1e_1+...+a_ne_n$ tel qu'il existe $i < j$ avec $a_i \neq a_j$. Par stabilité (transposition (i,j)), il contient $a_1e_1 + ... + a_je_i + ... + a_ie_j + ... + a_ne_n$ et donc $e_i - e_j$ par différence. Par stabilité (transpositions), il contient tous les $e_1 - e_k$ avec k dans $\{2, ..., n\}$, donc H. C'est donc soit H soit $\mathbf{C}^n$ (dimension).

La réciproque est claire.

22. Pour toute permutation σ de $\{1, ..., n\}$, on note $p_{\sigma\|_H}$ la restriction de p_σ à H. Démontrer que tout endomorphisme f de H peut s'écrire sous la forme

$$f = \sum_{i=1}^{N} \lambda_i p_{\sigma_i|_H}$$

avec $N \in \mathbf{N}^*$, $\lambda_1, ..., \lambda_N$ des éléments de $\mathbf{C}$ et $\sigma_1, ..., \sigma_N$ des permutation de $\{1, ..., n\}$. On utilisera le théorème de Burnside.

Éléments de solution

Soit $f \in L(H)$. La sous-algèbre engendrée par les $p_{\sigma|_H}$ quand σ varie est l'espace vectoriel engendré par ces $p_{\sigma|_H}$ car les p_σ forment un groupe. Si un sous-espace de H est stable par tous les éléments de cette sous-algèbre, il l'est par tous les $p_{\sigma|_H}$ et la question précédente donne que c'est $\{0\}$ ou H car H et D sont supplémentaires. Elle est donc irréductible et c'est $L(H)$ avec le théorème de Burnside. On a le résultat.

23. Soit $M \in \mathcal{M}$ et m l'endomorphisme de $\mathbf{C}^n$ canoniquement associé. Soit u l'endomorphisme de $\mathbf{C}^n$ canoniquement associé à la matrice dont tous les coefficients valent 1.

Démontrer l'existence de N dans $\mathbf{N}^*$, $\lambda_1, ..., \lambda_N$ dans $\mathbf{C}$, $\sigma_1, ..., \sigma_N$ des permutation de $\{1, ..., n\}$ et α dans $\mathbf{C}$ tels que

$$m = \sum_{i=1}^{N} \lambda_i p_{\sigma_i} + \alpha u.$$

Éléments de solution

Soit m comme indiqué.

Il stablise H donc on peut écrire avec ce qui précède

$$mMid_H = \sum_{i=1}^{N} \lambda_i p_{\sigma_i MidH}.$$

Notons s la somme des éléments d'une ligne de M.

Pour $x \in D$, $m(x) = sx$ et $\sum_{i=1}^{N} \lambda_i p_{\sigma_i}(x) = (\sum_{i=1}^{N} \lambda_i)x$. (Il suffit de le vérifier avec le vecteur dont les composantes valent toutes 1 et se rappeler que les matrices de permutations sont celles qui comportent exclusivement un coefficient non nul par ligne et par colonne, ce coefficient valant 1).

On remarque que pour $x \in H$, $u(x) = 0$ et pour $x \in D$, $u(x) = nx$. On obtient donc bien

$$m = \sum_{i=1}^{N} \lambda_i p_{\sigma_i} + \alpha u$$

en prenant

$$\alpha = \frac{1}{n}(s - \sum_{i=1}^{N} \lambda_i),$$

car il y a égalité sur D et sur H, qui sont supplémentaires.

24. Etablir un lien entre l'endomorphisme u et la somme des endomorphismes p_σ quand σ parcourt l'ensemble des permutations de $\{1, ..., n\}$ et en déduire que l'espace vectoriel $\mathcal{M}$ formé des matrices magiques est exactement l'espace vectoriel engendré par les matrices de permutation P_σ.

Éléments de solution

Notons $P = (p_{i,j})$ la somme de toutes les P_σ. Pour i fixé, il y a exactement $(n-1)!$ permutations σ fixant l'élément i et on a donc $p_{i,i} = (n-1)!$. Pour i et j distincts, l'ensemble des permutations fixant i est en bijection avec celui des permutations envoyant i sur j (il suffit de composer par la transposition (i,j)), donc les coefficients de P valent tous $(n-1)!$ et la somme de tous les p_σ vaut $(n-1)!u$. La question précédente donne alors que u, donc m, est combinaison linéaire des p_σ. L'espace $\mathcal{M}$ est donc bien l'espace engendré par les matrices de permutation.

Passage au quotient et co-trigonalisation

25. Soit $\mathcal{F}$ une famille d'endomorphismes d'un espace vectoriel E, vérifiant une propriété $\mathcal{P}$ transmise par passage au quotient. Soit F un sous-espace de E stable par tous les éléments de $\mathcal{F}$. Démontrer que la famille formée des restrictions des éléments de $\mathcal{F}$ à F vérifie encore la propriété $\mathcal{P}$.

Éléments de solution

Le sous-espace F est stable par tous les éléments de $\mathcal{F}$, tout comme le sous espace $G = \{0\}$. La propriété $\mathcal{P}$ étant transmise par passage au quotient, la famille obtenue par passage au quotient avec $F/G = F$ est exactement celle des restrictions.

26. Démontrer que si f, endomorphisme d'un espace vectoriel E, laisse stable un sous-espace vectoriel F de E, alors l'endomorphisme $\overline{f}$ de E/F défini par $\overline{f}(\overline{x}) = \overline{f(x)}$ vérifie $rg\overline{f} \leqslant rgf$.

Éléments de solution

Notons r le rang de $\overline{f}$ et $(\overline{f}(\overline{e_1}), ..., \overline{f}(\overline{e_r}))$ une base de son image. Supposons $\alpha_1 f(e_1) + ... + \alpha_r f(e_r) = 0$ avec les α_i des scalaires. On a alors $\alpha_1 \overline{f}(\overline{e_1}) + ... + \alpha_r \overline{f}(\overline{e_r}) = \overline{0}$. Ainsi $\alpha_1 = ... = \alpha_r = 0$ et la famille $(f(e_1), ..., f(e_r))$ est libre. Aussi, $rg\overline{f} \leqslant rgf$.

27. Démontrer que si F est un sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel E et L' est un sous-espace vectoriel de E/F non nul et distinct de E/F, alors $L = \{x \in E, \overline{x} \in L'\}$ est un sous-espace vectoriel de E distinct de F et de E.

Éléments de solution

La surjection canonique s de E sur E/F a comme noyau F et L est l'image réciproque de L'. Alors, d'après les hypothèses, L contient strictement F et n'est pas égal à E.

28. **Le lemme fondamental de co-trigonalisation.**

On se donne une propriété $\mathcal{P}$ transmise par passage au quotient et on suppose qu'elle vérifie la condition suivante : toute famille d'endomorphismes définis sur un même espace vectoriel de dimension au moins 2 et vérifiant la propriété $\mathcal{P}$ est réductible.

Démontrer qu'une famille $\mathcal{F}$ d'endomorphismes qui vérifie la propriété $\mathcal{P}$ est co-trigonalisable. **Ce résultat constitue le lemme fondamental de co-trigonalisation.**

On pourra noter E l'espace vectoriel sur lequel sont définis les endomorphismes de la famille $\mathcal{F}$ et envisager une suite strictement croissante $\{0\} = L_0 \subset L_1 \subset ... \subset L_m = E$ de sous-espaces de E tous stables par les éléments de $\mathcal{F}$ et de cardinal maximal.

Éléments de solution

On considère une suite $\{0\} = L_0 \subset L_1 \subset ... \subset L_m = E$ de sous-espaces tous stables par les éléments de $\mathcal{F}$ de taille maximale, avec pour tout k, $L_k \neq L_{k+1}$. Une telle suite existe bien en raison de la dimension finie de E. Pour démontrer la co-trigonalisabilité des éléments de $\mathcal{F}$, il suffit de démontrer que pour tout k, la dimension de L_{k+1}/L_k vaut 1. Si pour un k donné, elle valait au moins 2, alors la réductibilité donnerait un sous-espace L' de L_{k+1}/L_k stable par tous les éléments de la famille quotient obtenue et donc $L = \{x \in L_{k+1}, \overline{x} \in L'\}$ serait un sous-espace stable par tous les éléments de $\mathcal{F}$ et strictement compris entre L_k et L_{k+1}. Cela contredirait le caractère maximal de la suite.

29. Le cas commutatif.

Soit $\mathcal{C}$ une famille d'endomorphismes qui commutent 2 à 2.

(a) Démontrer que toute famille d'endomorphismes d'un espace de dimension au moins 2 et qui commutent 2 à 2 est réductible. On pourra considérer un sous-espace propre d'un de ces endomorphismes.

Éléments de solution

Si tous les éléments de la famille sont des homothéties, toute droite de E fournit un sous-espace stable par les éléments de cette famille et prouve donc la réductibilité.

Supposons donc l'existence d'un élément f de la famille qui soit distinct d'une homothétie. Notons λ une valeur propre de f (c'est possible, le corps de base est $\mathbf{C}$). Le sous-espace propre correspondant est stable par tout élément de la famille (elle est commutative) et distinct de $\{0\}$ et de E. Cela conclut.

(b) En déduire que les éléments de $\mathcal{C}$ sont co-trigonalisables.

Éléments de solution

La commutativité est une propriété stable par passage au quotient (c'est indiqué par l'énoncé). La question précédente et le lemme de co-trigonalisation permettent de conclure.

30. Le cas nilpotent.

On suppose que $\mathcal{A}$ est une algèbre d'endomorphismes formée d'éléments tous nilpotents.

(a) Démontrer que dans un espace vectoriel de dimension au moins 2, une telle algèbre est réductible. On peut utiliser le théorème de Burnside et la propriété $\mathcal{P}$ définie par : *être une algèbre d'endomorphismes formée d'éléments tous nilpotents.*

Éléments de solution

La propriété $\mathcal{P}$ proposée est stable par passage au quotient (c'est indiqué dans l'énoncé) . Dans tout espace vectoriel de dimension au moins 2, il existe des endomorphismes non nilpotents. Ainsi, une telle algèbre est réductible d'après le théorème de Burnside.

(b) En déduire que les éléments de $\mathcal{A}$ sont co-trigonalisables.

Éléments de solution

La question précédente combinée au lemme de co-trigonalisation donne le résultat demandé.

31. Le cas des commutateurs nilpotents.

On suppose que $\mathcal{A}$ est une algèbre d'endomorphismes telle que pour tous f et g dans $\mathcal{A}$, $f \circ g - g \circ f$ (appelé commutateur de f et g) soit nilpotent.

(a) Démontrer que si $n \geqslant 2$, il existe deux matrices B et C de $M_n(\mathbf{C})$ telles que la matrice $BC - CB$ ne soit pas nilpotente. On pourra commencer par le cas $n = 2$.

Éléments de solution

$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ donnent $BC - CB = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, dont le carré vaut $-I_2$. Cela fournit un exemple en dimension 2. En dimension quelconque, il suffit de placer ces deux matrices en haut à gauche et de les gonfler pour en faire des matrices de taille n en complétant avec des 0 partout ailleurs.

(b) Vérifier que la propriété $\mathcal{P}$ définie par : *être une algèbre constituée d'endomorphismes telle que pour tous f et g dans cette algèbre, $f \circ g - g \circ f$ est nilpotent* est une propriété transmise par passage aux quotients.

Éléments de solution

Vérification immédiate avec les exemples de l'énoncé lors de la définition de la stabilité par passage aux quotients.

(c) Démontrer que les éléments de $\mathcal{A}$ sont co-trigonalisables.

Éléments de solution

L'algèbre $\mathcal{A}$ vérifie la propriété $\mathcal{P}$ ci-dessus. Cette propriétés est transmise par passage aux quotients. La question 32a assure que pour un espace de dimension au moins 2, $\mathcal{A}$ n'est pas tout $L(E)$ et le théorème de Burnside garantit donc que $\mathcal{A}$ est réductible. Le lemme de co-trigonalisation conclut.

32. Le cas d'une algèbre.

Démontrer que si $\mathcal{A}$ est une algèbre d'endomorphismes, ses éléments sont co-trigonalisables si et seulement si, pour tous f et g dans $\mathcal{A}$, f et g sont co-trigonalisables.

Éléments de solution

Supposons que pour tous f et g de $\mathcal{A}$, f et g soient co-trigonalisables. En raisonnant dans une base commune de trigonalisation, on constate donc que $f \circ g - g \circ f$ est représenté par une matrice triangulaire strictement supérieure. On en déduit que $f \circ g - g \circ f$ est nilpotent. La question précédente assure que les éléments de $\mathcal{A}$ sont donc co-trigonalisables. La réciproque est évidente.

33. Un théorème de Mc Coy.

On se donne deux matrices A et B de $M_n(\mathbf{C})$. On désire démontrer le théorème suivant, dû à Mc Coy.

Il y a équivalence entre les deux propriétés suivantes :

(1) : Les deux matrices A et B sont co-trigonalisables dans $M_n(\mathbf{C})$.

(2) : Pour tout polynôme $p(X,Y)$ à coefficients dans C en deux variables X et Y non commutatives, la matrice $p(A,B)(AB - BA)$ est nilpotente.

(a) Démontrer l'implication (1)⇒(2).

Éléments de solution

Il suffit de co-trigonaliser A et B et de constater que $p(A,B)(AB - BA)$ est toujours triangulaire supérieure stricte.

On suppose désormais la propriété (2) vérifiée et on désire démontrer la propriété (1).

(b) Que dire dans le cas où $AB = BA$?

Éléments de solution

On a déjà vu plus haut que dans ce cas, (1) est vérifié.

On suppose donc désormais $AB \neq BA$.

(c) Démontrer l'existence d'un vecteur colonne non nul X et d'une matrice C de $M_n(\mathbf{C})$ tels que
$C(AB - BA)X = X$.

Éléments de solution

On peut trouver un vecteur colonne X non nul tel que $Y = (AB - BA)X \neq 0$. On peut trouver une matrice C telle que $CY = X$.

(d) En déduire que l'algèbre $\mathcal{A}$ engendrée par A et B est réductible.

Éléments de solution

Confondons matrices et endomorphismes canoniquement associés. Si cette algèbre était irréductible, le théorème de Burnside donnerait que $\mathcal{A} = M_n(\mathbf{C})$. En particulier C ci-dessus serait dans $\mathcal{A}$, donc s'écrirait $p(A,B)$ et $C(AB-BA)$ serait nilpotente. C'est exclu car 1 est valeur propre de cette matrice. L'algèbre $\mathcal{A}$ est donc réductible.

(e) Conclure.

Éléments de solution

La propriété (2) est clairement transmise par passage aux quotients. Il suffit donc de démontrer pour avoir la co-trigonalisabilité de A et B que l'algèbre $\mathcal{A}$ engendrée par A et B est, en dimension $\geqslant 2$, réductible. C'est assuré par les questions précédentes.

34. On désire dans cette question améliorer le théorème de Mc Coy en se limitant aux monômes, c'est à dire en remplaccant la condition (2) par la condition plus faible (3) suivante :

(3) : Pour tout $m \geqslant 0$ **et tout** $(M_1, ..., M_m) \in \{A, B\}^m$**, la matrice** $M_1 M_2 ... M_m (AB - BA)$ **est nilpotente.**

On suppose donc la propriété (3) vérifiée et on désire démontrer la propriété (1). On peut supposer que $AB \neq BA$, le cas $AB = BA$ ayant déjà été traité.

(a) Que dire de la trace des éléments du type $M_1 M_2 ... M_m (AB-BA)$ avec $m \geqslant 0$ et $(M_1, ..., M_m) \in \{A, B\}^m$?

Éléments de solution

La trace est nulle car les éléments sont nilpotents (question 1 du préliminaire).

(b) Démontrer que l'algèbre $\mathcal{A}$ engendrée par A et B est réductible.

Éléments de solution

Les éléments de $\mathcal{A}$ sont les combinaisons linéaires des éléments ci-dessus et la trace étant linéaire, les éléments de $\mathcal{A}$ sont de trace nulle. Comme il existe des éléments de $M_n(\mathbf{C})$ de trace non nulle, le théorème de Burnside conclut.

(c) Conclure.

Éléments de solution

La propriété (3) est transmise par passage au quotient, en confondant matrices et endomorphismes canoniquement associés. Comme avant, la réductibilité prouvée à la question précédente montre que les éléments de $\mathcal{A}$ sont co-trigonalisables. Ainsi, A et B le sont.

35. Application 1.

Démontrer en utilisant le théorème de Mc Coy qu'une matrice $A \in M_n(\mathbf{C})$ est normale, c'est à dire commute avec son adjointe $A^* = \overline{A}^T$, si et seulement si elle est diagonalisable via le groupe unitaire $U_n(\mathbf{C})$, c'est à dire si et seulement si il existe une matrice diagonale D et une matrice unitaire P telles que $A = PDP^{-1}$. On pourra utiliser le procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt.

Éléments de solution

Si A est diagonalisable via le groupe unitaire, il existe D diagonale et P unitaire telle que $A = PDP^{-1}$. Dire que P est unitaire, c'est dire que $P^{-1} = \bar{P}^T$. On a donc aussi $A^* = P\bar{D}P^{-1}$. Ainsi, $A^*A = AA^*$.

Supposons que $A^*A = AA^*$. Le théorème de Mc Coy (elles commutent !) assure que A et A^* sont co-trigonalisables dans $M_n(\mathbf{C})$ car $A^*A - AA^* = 0$ et donc (2) est clairement vérifié. Le procédé de Gram-Schmidt appliqué à la base de co-trigonalisation donne une matrice unitaire qui convient.

36. Application 2.

Dans cette question, on se donne deux éléments A et B de $M_n(\mathbf{C})$. Dans les différents cas suivants, démontrer que A et B sont co-trigonalisables dans $M_n(\mathbf{C})$.

(a) $AB = 0$.

(b) A et B commutent avec $AB - BA$.

(c) $AB - BA = B$.

(d) Il existe α et β dans $\mathbf{C}$ tels que $AB - BA = \alpha A + \beta B$.

Pour le (c), on exprimera $AB^k - B^k A$ à l'aide de B^k pour tout k dans $\mathbf{N}$ et on montrera que B^k est nilpotente. Pour le (d), on se ramènera au cas (c).

Éléments de solution

Pour le (a) : on applique le raffinement du théorème de Mc Coy. Un mot en A, B s'écrit alors $A^p B^q$ avec p et q entiers. Si q est non nul, $A^p B^q (AB - BA) = 0$ et si $q = 0$, alors $A^p B^q (AB - BA) = A^{p+1} B$. Cette dernière matrice est de carré nul donc nilpotente. On a donc le résultat.

Pour le (b) : on vérifie qu'en posant $C = AB - BA$, alors pour tout $k \geqslant 1$, $C^k = AC^{k-1}B - BAC^{k-1}$. On en déduit que la trace de C^k est nulle pour tout $k \geqslant 1$, donc que C est nilpotente. Ainsi, pour tout polynôme $p(X, Y)$ en deux indéterminées non commutatives, $(p(A, B)C)^n = p(A, B)^n C^n = 0$ car $p(A, B)$ et C commutent. Le théorème de Mc Coy conclut.

Pour le (c) : facilement, $AB^k - B^k A = kB^k$ pour tout k. On en déduit la nilpotence de B avec le fait que $MMqapstoAM - MA$ admet un nombre fini de valeurs propres et donc que $B^k = 0$ pour k assez grand. Si M est un mot en A, B, il s'agit de prouver que MB est nilpotente. L'égalité $BA = (A - I_n)B$ prouve que $MB = p(A)B^{k+1}$ avec $p \in \mathbf{C}[X]$ et k le nombre d'occurrences de B dans M. Ainsi, MB est clairement nilpotente.

Pour le (d) : on suppose que $AB - BA = \alpha A + \beta B$. Il suffit de traiter le cas où α et β ne sont pas tous les deux nuls. Par exemple, $\beta \neq 0$. On écrit alors $A'B' - B'A' = B'$ avec $A' = \dfrac{1}{\beta} A$ et $B' = B + \dfrac{\alpha}{\beta} A$. L'algèbre engendrée par A' et B' est la même que celle engendrée par A et B, donc le cas précédent conclut : A' et B' sont co-trigonalisables, donc A et B aussi.

Bien sûr, des preuves directes sont possibles.