Chapitre 4

rapport sur les épreuves écrites

4.1 Première épreuve écrite

4.1.1 Enoncé

On trouvera l'énoncé de l'épreuve à l'adresse suivante : http://agrint.agreg.org/14-EP1.pdf

4.1.2 Thème :

Le sujet de la première épreuve porte sur les groupes linéaires $GL_n(\mathbf{R})$ et $GL_n(\mathbf{C})$ et certains de leurs sous-groupes, ainsi que sur le groupe des bijections affines du plan. La première partie rassemble des résultats utiles pour les parties suivantes. Ce sont souvent des résultats classiques, très proches du cours en ce qui concerne les premières questions. La deuxième partie vise à établir que "le groupe $GL_n(\mathbf{R})$ ne possède pas de petits sous-groupes", i.e. que si G, sous-groupe de $GL_n(\mathbf{R})$, est contenu dans la boule ouverte de rayon 1 centrée en Id pour la norme matricielle déduite de la norme euclidienne sur $\mathbf{R}^n$, alors $G = \{Id\}$. La troisième partie, indépendante de la précédente, étudie les sous-groupes à un paramètre de $GL_n(\mathbf{R})$, d'abord sous l'hypothèse C^1, puis dans le cas général C^0. Ceci est ensuite utilisé pour décrire les orbites d'un groupe à un paramètre à valeurs dans $SL_2(\mathbf{R})$. La quatrième partie, qui s'appuie sur les résultats de la troisième, traite des groupes à un paramètre à valeurs dans le groupe des bijections affines du plan dont la partie linéaire est de déterminant 1, et décrit les différentes orbites possibles. La cinquième partie, indépendante des trois précédentes, étudie certains sous-groupes des groupes linéaires $GL_n(\mathbf{R})$ et $GL_n(\mathbf{C})$: groupe spécial linéaire, groupe spécial orthogonal, groupe spécial unitaire. Dans un premier temps, on considère quelques propriétés topologiques. On introduit ensuite leur algèbre de Lie comme espace vectoriel via l'application exponentielle : on étudie la surjectivité de cette dernière, on établit la stabilité par commutateur et on fait le lien entre exponentielle de l'action adjointe qui s'en déduit et conjugaison par l'exponentielle de l'élément considéré. La dernière question traite du revêtement de $SO(3)$ par $SU(2)$, en utilisant les notions introduites précédemment.

4.1.3 Ce qu'ont fait les candidats :

À quelques rares exceptions près, la présentation et la rédaction des copies sont plutôt satisfaisantes et les candidats ont fait preuve d'honnêteté intellectuelle lorsqu'ils étaient en difficulté sur une question. Ils cherchent à suivre le fil du problème ce qui fait qu'en général les réponses proposées sont dans l'ordre des questions de l'énoncé.

4.1.4 Partie I

Elle a été abordée par pratiquement tous les candidats.

Les questions 1 et 2 sont bien traitées en général, mais on voit malgré tout beaucoup de copies où le candidat ne fait pas attention à l'ordre dans les produits : il était souhaitable de rappeler que A et $\exp(tA)$ commutent, mais il ne fallait pas supposer a priori que $\exp(tA)$ et $F(t)$ commutent. Pour quelques candidats, une matrice constante est forcément de la forme λI !

De même, dans la question 2, une minorité ne voit pas vraiment où intervient l'hypothèse $AB = BA$. Certains candidats ont utilisé le produit de Cauchy des séries absolument convergentes pour établir le résultat.

Dans la question 3, beaucoup de candidats font la preuve pour une matrice diagonale, puis essaient de conclure par un argument de densité. Trop de candidats prétendent que toute matrice à coefficients complexes est diagonalisable ! Le fait que toute matrice carrée complexe est semblable à une matrice triangulaire ne semble pas connu de tous. On regrette des confusions de vocabulaire, parfois, entre matrices semblables et matrices équivalentes.

Dans la question 4, si l'indication est en général traitée avec succès, il n'en va pas de même pour le reste de la question que beaucoup trouvent évident avec l'indication ! Très peu de candidats établissent clairement les deux inégalités.

La question 5 demandait une bonne compréhension du cours sur les applications affines. L'injectivité ne présentait pas de difficulté et a été correctement traitée. Par contre, assez peu de candidats parviennent finalement à établir que l'on a bien un morphisme de groupes : beaucoup pensent qu'il s'agit de montrer que l'application est linéaire, ou bien un morphisme de groupes additifs... En revanche, il n'était pas nécessaire de vérifier que l'image du neutre est le neutre...

La question 6 donne souvent lieu à l'erreur suivante : $\varphi(x) = x \iff \varphi(x) - x = 0 \iff A_\varphi(x) - x = 0$ ... Certains ont néanmoins correctement traité cette question.

Dans la question 7 a), bon nombre de candidats, en raisonnant par l'absurde, parviennent à établir que A est une matrice d'homothétie, et à conclure. Mais ce résultat pourtant classique n'est pas connu de tous les candidats.

Quelques candidats ont correctement mené la récurrence dans la question 7 b). On note encore des confusions entre matrices semblables et matrices équivalentes : certains candidats font des opérations élémentaires sur les lignes (ou colonnes) pour faire apparaître des zéros sur la diagonale, affirmant qu'on obtient ainsi des matrices semblables, ce qui n'est pas le cas.

Pour la question 7 c), certains remarquent bien que la démonstration de la question précédente reste valable dans le cas réel, mais beaucoup disent ensuite que pour se ramener à une matrice de passage de déterminant 1, il suffit de prendre la matrice $Q = \dfrac{1}{\det(P)} P$, ce qui ne convient pas puisque $\det(\lambda P) = \lambda^n \det(P)$. Il y a parfois eu des confusions entre $SL_n(\mathbf{R})$ et $O_n(\mathbf{R})$.

4.1.5 Partie II

Elle a souvent été souvent abordée, mais pas très bien traitée en général.

Trop peu de candidats voient la subtilité dans la question 8, et écrivent : « soit $x \in \mathbf{R}^n$ un vecteur propre associé à λ », alors que ce vecteur propre est a priori dans $\mathbf{C}^n$; ceux qui l'on vu ont fait le rapprochement avec la question 4. On regrette beaucoup d'abus de langage dans cette question, comme « soit x LE vecteur propre associé... ».

La plupart des candidats qui ont traité la question 9 a) ont réussi a établir que l'hypothèse $|\lambda| > 1$ ou $|\lambda| < 1$ conduit à une absurdité, mais assez peu parviennent à traiter correctement le cas $|\lambda| = 1$.

Pour traiter la question 9b), beaucoup invoquent la décomposition de Dunford mais elle n'est pas toujours bien justifiée, le corps n'est pas toujours précisé. Quelques uns ont néanmoins pensé au polynôme caractéristique de g, ce qui permettait de répondre rapidement à la question.

La question 9c), plus délicate a été très peu abordée avec succès.

4.1.6 Partie III

En général, les questions 10, 11 et 12 ont été abordées.

La question 10, bien qu' élémentaire, a été souvent mal traitée. On a vu trop souvent le raisonnement suivant : « *avec* $s = t = 0$ *on a* $\varphi(0)[\varphi(0) - I] = 0$, *or* $\varphi(0)$ *est non nulle car* $0 \notin GL_n(\mathbf{C})$, *donc* $\varphi(0) = I$ ». Faut-il rappeler que l'anneau des matrices carrées n'est pas intègre dès que $n \geqslant 2$? Il suffisait de rappeler qu'un morphisme de groupes envoie l' élément neutre du groupe de départ, qui était $(\mathbf{R}, +)$ ici, sur l'élément neutre du groupe d'arrivée, qui était $(GL_n(\mathbf{C}), \times)$ ici.

Les questions 11 et 12 a) sont correctement traitées dans un grand nombre de cas.

Les autres questions de cette partie ont été très peu abordées.

4.1.7 Partie IV

Elle a été très rarement abordée.

Les questions les plus étudiées sont les questions 17 b) et c) : beaucoup de candidats déterminent correctement $v(t)$, mais il manque souvent la justification via l'hypothèse de continuité ; très peu ont obtenu $u(t)$.

4.1.8 Partie V

Elle a été peu abordée.

Les questions 18 a), b) et c) sont rarement traitées correctement ; on y voit des assertions surprenantes sur la topologie, comme celle disant (faussement !) que l'image réciproque d'un connexe par une application continue est un connexe...

La question 19 a) est en général bien traitée par ceux qui l'abordent, mais la question 19 b) est rarement traitée entièrement correctement. On voit souvent l'erreur $\exp(X^t) = \exp(-X)$ donc $X^t = -X$, comme si on était dans $\mathbf{R}$, ou l'utilsation erronée de la commutation d'une matrice et de sa transposée.

La question 23 a) a beaucoup été abordée mais quasiment personne n'a su répondre entièrement ! La plupart des candidats montrent que la famille (A, B, C) est libre et concluent en disant que, comme $\mathcal{G}$ est de dimension 3, on a une base. Mais il fallait justifier cette affirmation !

4.2 Seconde épreuve écrite

4.2.1 Énoncé

On trouvera l'énoncé de l'épreuve à l'adresse suivante : http ://agrint.agreg.org/14-EP2.pdf

4.2.2 Généralités

Thème

L'épreuve 2 de cette année proposait, dans un cadre probabiliste, de faire le point des connaissances sur les approximations polynomiales uniformes des fonctions continues sur un segment de $\mathbb{R}$.